Klassiset ryhmät
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 1
ma 25.5.2009

Näissä harjoituksissa kaikkien vektoriavaruuksien kerroin- eli skalaarikuntana on $\mathbb{R}$, ja kaikki vektorit ajatellaan sarakevektoreina.

1. Tutki, ovatko seuraavat kuvaukset lineaarisia? Myönteisissä tapauksissa etsi kuvausta vastaava matriisi A, jolle pätee $L(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$.

   (a) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $L(x, y, z) = (x + 2y - z, z - x)$.

   (b) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$.

   (c) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L(\mathbf{v})$ saadaan kiertämällä vektoria $\mathbf{v}$ origon ympäri vastapäivään 45 astetta (eli $\pi/4$ radiaania).

   (d) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $L(\mathbf{v})$ saadaan peilaamalla vektori $\mathbf{v}$ x-akselin suhteen ja siirtämällä sitä sen jälkeen 3 yksikköä positiivisen y-akselin suuntaan.

   (e) $L = L_c \circ L_a$, missä L_a on (a)-kohdan kuvaus ja L_c (c)-kohdan kuvaus.

2. Laske seuraavien matriisien determinantit.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 \\ g & h & i & j \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D = BC, \quad E = B + C.$$

3. Palauta mieleen *jäännösluokkarenkaat* $\mathbb{Z}_n = \{[0], [1], [2], \ldots, [n-1]\}$, joissa

$$[a] = [b], \quad \text{joss } a - b \text{ on jaollinen luvulla } n.$$

   Yhteenlasku määritellään $[a] + [b] = [a + b]$ ja kertolasku $[a] \cdot [b] = [a \cdot b]$. (Nämä renkaat saadaan $\mathbb{Z}$:n tekijärenkaina ideaalin $n\mathbb{Z} = \{nz \mid z \in \mathbb{Z}\}$ suhteen.) Tarkista seuraavat väitteet:

   (a) $\mathbb{Z}_7$ on kunta. (Tämä pätee renkaalla $\mathbb{Z}_p$ joss p on alkuluku.)

   (b) Joukko $\mathbb{Z}_7 \setminus \{[0]\}$ on kertolaskun suhteen syklinen ryhmä. (Tämäkin pätee kaikilla alkuluvuilla, mutta on huomattavasti vaikeampi osoittaa.)

4. Olkoon V vektoriavaruus. Tarkastellaan joukkoa

$$GL(V) = \{L : V \to V \mid L \text{ on kääntyvä lineaarikuvaus}\}.$$

   (a) Osoita, että $GL(V)$ on ryhmä, laskutoimituksena kuvausten yhdistäminen.
   (b) Merkitään $SL(V) = \{L : V \to V \mid \det L = 1\}$. Osoita, että $SL(V)$ on ryhmän $GL(V)$ aliryhmä.

5. Olkoot V ja W vektoriavaruuksia, kantoinaan $S = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ ja $T = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$. Olkoon f kuvaus, jolle pätee

$$f(v_i) = a_{i1}w_1 + a_{i2}w_2 + \cdots + a_{im}w_m \quad \text{kaikilla } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

   Osoita, että on olemassa yksikäsitteinen lineaarikuvaus L, jolle $L(v_i) = f(v_i)$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$. (Eli lineaarikuvaus on täysin määrätty, kun sen arvot kantavektoreilla tunnetaan.) Mikä on L:n matriisiesitys kantojen S ja T suhteen?

6. Osoita, että jos kahden äärellisulotteisen (reaalikertoimisen) vektoriavaruuden dimensiot ovat samat, ne ovat isomorfiset. (Eli niiden välille voidaan määritellä kääntyvä lineaarikuvaus.)

   Vihje. Tarkastele kantoja ja käytä tehtävää 5.