9.5. Lien algebrat. Lien algebrat tarjoavat tärkeän esimerkin epäliitännäisistä algebroista. Yleensä Lien algebrat liitetään vastaaviin Lien ryhmiin, jotka kuvaavat jatkuvia symmetrioita; eräs esimerkki on reaalitason ympyrän symmetriaryhmä. Näillä ryhmillä on paljon käyttöä paitsi matematiikan puolella, myös teoreettisessa fysiikassa. Lien algebroja voidaan myös käyttää muun muassa yksinkertaisten Lie-tyypin ryhmien luokitteluun ja analysointiin.

MÄÄRITELMÄ 9.13. Olkoon $\mathfrak{L}$ jokin K-vektoriavaruus. Oletetaan, että avaruudessa $\mathfrak{L}$ on määritelty bilineaarinen tulo $(x, y) \mapsto [xy]$, jolle pätee

(LA1) $[xx] = 0$ kaikilla $x \in \mathfrak{L}$
(LA2) $[x[yz]] + [y[zx]] + [z[xy]] = 0$ kaikilla $x, y, z \in \mathfrak{L}$.

Tällöin avaruutta $\mathfrak{L}$ kutsutaan *Lien algebraksi.*

Ehtoa (LA1) nimitetään *alternoivuudeksi* ja ehtoa (LA2) *Jacobin identiteetiksi.* Lien algebran kertolasku ei yleensä ole liitännäinen eikä vaihdannainen; sen sijaan ehdon (LA1) ja kertolaskun bilineaarisuuden perusteella pätee

$$0 = [(x + y)(x + y)] = [xx] + [xy] + [yx] + [yy] = [xy] + [yx],$$

mistä seuraa

(LA1′) $[xy] = -[yx]$ kaikilla $x, y \in V$.

Jos kerroinkunnan karakteristika ei ole 2, ehdot (LA1) ja (LA1′) ovat yhtäpitäviä: tällöin nimittäin ehto (LA1) saadaan asettamalla $x = y$ yhtälössä $[xy] + [yx] = 0$.

Liitännäisten algebrojen avulla voidaan tuottaa runsaasti esimerkkejä Lien algebroista. Olkoon A jokin liitännäinen K-algebra, esimerkiksi K-kertoimisten neliömatriisien muodostama algebra. *Lien kommutaattori* määritellään kaavalla

$$[x, y] = xy - yx \qquad \text{kaikilla } x, y \in A.$$

Algebrasta A tulee Lien algebra kertolaskun $(x, y) \mapsto [x, y]$ suhteen. Tämä kertolasku on nimittäin selvästi bilineaarinen, ja sille pätee ehto (LA1). Jacobin identiteetin tarkistamiseksi todetaan, että

$$\begin{aligned}
[x, [y, z]] &= [x, yz - zy] = (xyz - xzy) - (yzx - zyx) \\
[y, [z, x]] &= [y, zx - xz] = (yzx - yxz) - (zxy - xzy) \\
[z, [x, y]] &= [z, xy - yx] = (zxy - zyx) - (xyz - yxz).
\end{aligned}$$

Kun lasketaan yllä olevat lausekkeet yhteen, saadaan tulokseksi 0. Liitännäisyyttä käytettiin siihen, että kolminkertaiset tulot voitiin kirjoittaa ilman sulkeita.

ESIMERKKI 9.14. Palautetaan mieleen, että matriisin x *jälki* on sen diagonaalialkioiden summa: $\operatorname{tr} x = \sum_i x_{ii}$. Tarkastellaan joukkoa

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) = \{x \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \operatorname{tr} x = 0\}.$$

On helppo nähdä, että $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ on liitännäisen algebran $\mathbb{R}^{n\times n}$ aliavaruus (se on lineaarikuvauksen $\operatorname{tr} : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ ydin), mutta kyseinen aliavaruus ei ole suljettu matriisikertolaskun suhteen. Toisaalta, jos tarkastellaan avaruutta $\mathbb{R}^{n\times n}$ Lien algebrana kertolaskun $[x, y]$ suhteen, voidaan osoittaa, että $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ on Lien alialgebra. Kaikille matriiseille $x, y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nimittäin pätee

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(xy - yx) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} x_{ik}y_{ki} - \sum_{k=1}^{n} y_{ik}x_{ki} \right) \\ &= \sum_{i,k=1}^{n} x_{ik}y_{ki} - \sum_{i,k=1}^{n} x_{ki}y_{ik} = 0.\end{aligned}$$

Lien algebraa $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ nimitetään *erityiseksi lineaariseksi algebraksi.*

Jos liitännäinen algebra A on myös vaihdannainen, niin kommutattori $[x, y]$ on nolla kaikilla $x, y \in A$. Tämä ominaisuus otetaan Lien algebran vaihdannaisuuden määritelmäksi.

MÄÄRITELMÄ 9.15. Lien algebraa $\mathfrak{L}$ kutsutaan *vaihdannaiseksi*, jos $[xy] = 0$ kaikilla $x, y \in \mathfrak{L}$.

Huomaa, että Lien algebran vaihdannaisuus ei ole sama asia kuin yleisen algebran vaihdannaisuus. Jos kerroinkunnan karakteristika ei ole 2, niin Lien algebra $\mathfrak{L}$ on vaihdannainen, jos ja vain jos $[xy] = [yx]$ pätee kaikilla $x, y \in \mathfrak{L}$ eli $\mathfrak{L}$ on vaihdannainen algebra. Kuitenkin karakteristikan ollessa 2 ehto $[xy] = [yx]$ seuraa suoraan ehdosta (LA1′) eikä $\mathfrak{L}$ silti ole välttämättä vaihdannainen Lien algebra.

LAUSE 9.16. *Jokainen yksiulotteinen Lien algebra on vaihdannainen.*

TODISTUS. Oletetaan, että $\mathfrak{L}$ on yksiulotteinen K-kertoiminen Lien algebra. Olkoon v jokin nollasta poikkeava vektori. Avaruus $\mathfrak{L}$ on nyt vektorin v virittämä, joten jokainen alkio on muotoa av, missä $a \in K$. Alternoivuudesta seuraa $[(av)(bv)] = ab[vv] = 0$ kaikilla $a, b \in K$, joten $\mathfrak{L}$ on vaihdannainen. $\square$

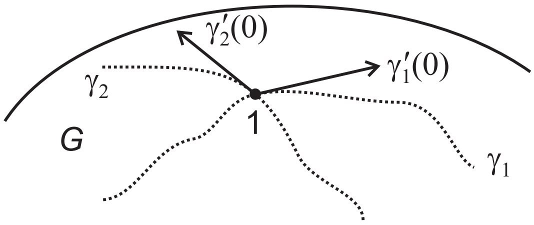
ESIMERKKI 9.17. Lien algebrat liittyvät läheisesti *Lien ryhmiin.* Tarkastellaan esimerkkinä Lien ryhmästä jotain reaalikertoimista matriisiryhmää $G \leq GL_n(\mathbb{R})$. Tämän ryhmän matriiseja voidaan ajatella avaruuden $\mathbb{R}^{n^2}$ pisteinä, jolloin esimerkiksi ryhmässä määritellyille funktioille ja poluille voidaan määritellä raja-arvot ja derivaatat tavalliseen tapaan.

Olkoon $\gamma : \mathbb{R} \to G$ derivoituva funktio, jolle pätee $\gamma(0) = 1$ (ykkösmatriisi). Tämä γ on neutraalialkion kautta kulkeva *polku.* Derivaatta $\gamma'(0) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ määrää polun *tangenttivektorin* neutraalialkion kohdalla. Voidaan osoittaa, että kaikkien neutraalialkion kautta kulkevien polkujen tangenttivektorit muodostavat avaruuden $\mathbb{R}^{n\times n}$ aliavaruuden $\mathfrak{g}$. Tämä *tangenttiavaruus* on lisäksi suljettu Lien kommutaattorin suhteen, joten se on Lien algebra. Sitä kutsutaan *ryhmän G Lien algebraksi.* Kommutaattorilla on läheinen yhteys konjugointiin ryhmässä G.

Jos $x \in \mathfrak{g}$, eli x on jonkin neutraalialkion kautta kulkevan polun γ derivaatta, pätee derivaatan määritelmän mukaan

$$\gamma(t) = 1 + tx + t\epsilon(t),$$

missä $|\varepsilon(t)| \to 0$, kun $t \to 0$. Polulla γ olevia ryhmän alkioita voidaan siis approksimoida Lien algebran alkion tx avulla, kun t on riittävän pieni. Tämän vuoksi Lien algebraa nimitetään joskus ryhmän *generoivaksi* algebraksi. Yllä olevan kaavan perusteella alkiota tx voidaan pitää infinitesimaalisena ryhmän alkiona, ja



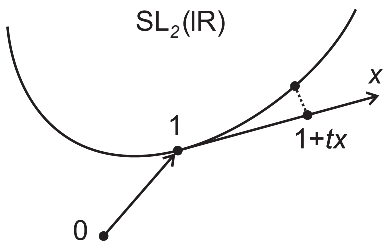
Kuva 18. Lien ryhmän G tangenttivektoreita

Lien algebraa nimitetäänkin joskus *infinitesimaaliseksi ryhmäksi*, vaikka todellisuudessa Lien algebralla ei ole ryhmän rakennetta.

Esimerkiksi erityinen lineaarinen algebra $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ (ks. esimerkki 9.14) on erityisen lineaarisen ryhmän $SL_n(\mathbb{R})$ Lien algebra. Ryhmään $SL_n(\mathbb{R})$ kuuluvat sellaiset $n \times n$-matriisit, joiden determinantti on 1. Jos $x \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, niin x on muotoa $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & -a \end{smallmatrix}\right]$, ja

$$\det(1+tx) = \begin{vmatrix} 1+ta & tb \\ tc & 1-ta \end{vmatrix} = 1 - t^2(a^2+bc).$$

Jos parametri t on infinitesimaalisen pieni, toisen potenssin t^2 sisältävä termi voidaan jättää huomiotta. Tällöin huomataan, että matriisin $1+tx$ determinantti on erittäin lähellä ykköstä, joten kyseinen matriisi approksimoi jotain ryhmän $SL_2(\mathbb{R})$ alkiota.



Kuva 19. Matriisi $1+tx$ on lähellä ryhmää $SL_2(\mathbb{R})$.

Yleisessä tapauksessa Lien ryhmät voivat olla mitä tahansa derivoituvia monistoja. Tällöin tangenttivektorit voidaan määritellä samaan tapaan kuin matriisien tapauksessa. Kertolaskua ei kuitenkaan saada suoraan matriisialgebran kommutaattorina vaan se on johdettava muulla tavalla.