8. Modulikonstruktioita

8.1. Vapaat modulit. Vektoriavaruuden tärkeimpiä ominaisuuksia on, että sen vektorit voidaan ilmaista yksikäsitteisesti kantavektorien yhdistelminä. Tässä luvussa tarkastellaan moduleja, joilla on vastaava ominaisuus.

Olkoon X osajoukko R-modulissa M. Mitä tahansa äärellistä summaa $\sum_i r_i x_i$, missä $r_i \in R$ ja $x_i \in X$ kaikilla i, kutsutaan joukon X *lineaarikombinaatioksi.* Jos jokainen modulin M alkio voidaan ilmaista joukon X lineaarikombinaationa, sanotaan, että X *virittää* modulin M. Edelleen, jos kullakin lineaarikombinaatiolla pätee $\sum_i r_i x_i = 0$ ainoastaan siinä tapauksessa, että $r_i = 0$ kaikilla i, sanotaan, että osajoukko X on *lineaarisesti riippumaton* eli *vapaa.* Jos osajoukko ei ole vapaa, se on *sidottu.*

MÄÄRITELMÄ 8.1. Olkoon M jokin R-moduli. Osajoukkoa $B \subset M$ kutsutaan modulin M *kannaksi*, jos B virittää modulin M ja on lineaarisesti riippumaton. Tällöin modulia M kutsutaan *vapaaksi.*

Vapaassa modulissa jokainen alkio voidaan esittää kannan alkioiden lineaarikombinaationa. Tämä esitys on lisäksi yksikäsitteinen, sillä jos $\sum_i r_i b_i = \sum_i r_i' b_i$, niin $\sum_i (r_i - r_i') b_i = 0$, ja koska joukko B on vapaa, tästä seuraa, että $r_i = r_i'$ kaikilla i.

Esimerkkejä vapaista moduleista:

- Lineaarialgebran peruskurssilla on osoitettu, että jokaisella äärellisellä $\mathbb{R}$-vektoriavaruudella on kanta, joten jokainen tällainen vektoriavaruus on vapaa $\mathbb{R}$-moduli. Sama todistus pätee millä tahansa kerroinkunnalla. Myös äärettömillä vektoriavaruuksilla on kanta, mutta sen todistamiseen tarvitaan Zornin lemmaa.
- Mikä tahansa rengas R on vapaa R-moduli, kantana yksiö $\{1\}$. Yleisemmin, tulomoduli R^n on vapaa, ja sen luonnollinen kanta koostuu alkioista $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (ykkösalkio i:nnellä paikalla).
- Vaihdannaista ryhmää kutsutaan vapaaksi, jos se on vapaa $\mathbb{Z}$-modulina. $\mathbb{Q}$ ei ole vapaa ryhmä. Myöskään $\mathbb{Z}_n$ ei ole vapaa, mikä seuraa erityisesti myöhemmin todistettavasta lauseesta 8.4. Tuo lause osoittaa, että jokainen vapaa ryhmä on isomorfinen ryhmien $\mathbb{Z}$ suoran summan kanssa; erityisesti jokainen vapaa ryhmä on ääretön.

Vapaisiin moduleihin liittyy seuraava universaaliominaisuus. Sen mukaan jokainen vapaassa modulissa määritelty lineaarikuvaus määräytyy täysin kannan alkioiden kuvien perusteella.

LAUSE 8.2. *Olkoon M vapaa R-moduli, jolla on kanta B, ja olkoon $\iota : B \to M$ inkluusiokuvaus. Oletetaan lisäksi, että N on jokin toinen R-moduli ja $f : B \to N$ on mikä tahansa kuvaus. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen R-lineaarinen kuvaus $\varphi : M \to N$, jolle pätee $f = \varphi \circ \iota$, eli oheinen kaavio kommutoi.*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, hook, "\iota"'] & & N \\ & M \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Lisäksi

i) φ *on injektiivinen, jos ja vain jos kuvajoukko* fB *on vapaa*
ii) φ *on surjektiivinen, jos ja vain jos kuvajoukko* fB *virittää modulin* N.

TODISTUS. Jokaisella vapaan modulin alkiolla on yksikäsitteinen esitys kannan alkioiden lineaarikombinaationa. Määritellään $\varphi : M \to N$ kaavalla

$$\sum_i r_i b_i \;\mapsto\; \sum_i r_i f(b_i). \tag{8.3}$$

On helppo nähdä, että näin saatu kuvaus on R-lineaarinen ja että $\varphi(b) = f(b)$ kaikilla kannan alkioilla b. Yksikäsitteisyys seuraa siitä, että lineaarikuvauksen on kuvattava lineaarikombinaatiot juuri kaavan (8.3) määräämällä tavalla.

Muiden väitteiden todistaminen jätetään harjoitustehtäväksi. □

Kun rengasta R ajatellaan R-modulina, voidaan muodostaa suora summa $\bigoplus_{i\in I} R$, jota merkitään $R^{(I)}$. Tämä on vapaa moduli. Sen *luonnollinen kanta* koostuu alkioista $e_j = (\delta_{ij})_{i\in I}$, missä $j \in I$ ja

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jos } i = j, \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Kannan alkiot ovat siis ykkösalkion kuvia kanonisissa injektioissa $\iota_i : R \to \bigoplus_i R$. Osoittautuu, että kaikki vapaat modulit ovat isomorfisia tällaisen suoran summan kanssa.

LAUSE 8.4. *Jos* M *on vapaa* R*-moduli, niin* $M \cong R^{(I)}$ *jollain* I.

TODISTUS. Olkoon $B = \{b_i\}_{i\in I}$ vapaan modulin M kanta. Määritellään kuvaus $f : B \to R^{(I)}$ kaavalla $f(b_i) = e_i$. Universaaliominaisuuden 8.2 nojalla on olemassa R-lineaarinen kuvaus $\varphi : M \to R^{(I)}$, jolle pätee $\varphi(b_i) = e_i$ kaikilla i. Saman lauseen loppuosan perusteella φ on bijektiivinen, koska joukko $\{e_i\}$ on modulin $R^{(I)}$ kanta. □

Nyt vapaan modulin universaaliominaisuus voidaan tulkita uudella tavalla: Jokaista joukkoa I kohti voidaan konstruoida "universaali" R-moduli $R^{(I)}$. Tässä modulissa joukon I alkio i samastetaan yleensä luonnollisen kannan alkion e_i kanssa. Tällöin mikä tahansa kuvaus f joukolta I johonkin R-moduliin N voidaan laajentaa homomorfismiksi $\varphi : R^{(I)} \to N$.

ESIMERKKI 8.5. Olkoon R rengas, ja X jokin joukko. Samastetaan kukin alkio $x \in X$ vapaan modulin $R^{(X)}$ kanta-alkion e_x kanssa. Tällöin vapaan modulin alkiot voidaan kirjoittaa formaalin lineaarikombinaation muodossa

$$\sum_x r_x x = \sum_x r_x e_x.$$

Tällä tavoin minkä tahansa joukon X päälle voidaan konstruoida modulirakenne, jota kutsutaan *joukon* X *virittämäksi vapaaksi moduliksi.*

Erityisesti, jos $R = \mathbb{Z}$ ja $n \in R$, alkiota nx voidaan pitää x:n formaalina monikertana. Tällä tavoin saadaan joukon X virittämä vapaa vaihdannainen ryhmä. Tässä ryhmässä joukon X alkioita voidaan lisätä yhteen ja vähentää toisistaan.

Esimerkiksi algebrallisessa topologiassa törmätään tilanteeseen, jossa joukko X koostuu jonkin topologisen avaruuden eräänlaisista yleistetyistä kolmioista (tarkemmin sanoen kolmioiden ja niiden n-ulotteisten vastineiden kuvista jatkuvissa kuvauksissa). Vapaassa ryhmässä $\mathbb{Z}^{(X)}$ voidaan näistä kolmioista luoda erilaisia lineaarikombinaatioita. Tämän ryhmän rakennetta tutkimalla saadaan tietoa avaruuden rakenteesta.

8.2. Tensoritulot. Monet vektoriavaruuksissa määriteltävät tulot ovat *bilineaarisia* eli lineaarisia molempien tekijöiden suhteen. Jos vektorien tuloa merkitään $(x, y) \mapsto x \otimes y$, bilineaarisuus tarkoittaa siis sitä, että

$$
\begin{aligned}
&(x+y) \otimes z = x \otimes z + y \otimes z, \qquad && (ax) \otimes y = a(x \otimes y) \\
\text{sekä} \quad & x \otimes (y+z) = x \otimes y + x \otimes z, && x \otimes (ay) = a(x \otimes y).
\end{aligned}
$$

Esimerkiksi tavallinen pistetulo $x \cdot y$ ja kolmiulotteisen reaaliavaruuden ristitulo $x \times y$ ovat bilineaarisia tuloja. Seuraavassa yleistetään bilineaarisen tulon käsite mielivaltaisille moduleille, ja tarkastellaan modulien *tensorituloa*, jossa voidaan määritellä eräänlainen universaali bilineaarinen tulo.

MÄÄRITELMÄ 8.6. Olkoot M, N ja P kolme R-modulia. Kuvausta f joukolta $M \times N$ moduliin P kutsutaan *R-bilineaariseksi*, jos se on lineaarinen molempien komponenttien suhteen, eli kaikilla $x, y \in M$, $z, w \in N$ sekä $a \in R$ pätee

(B1) $f(x + y, z) = f(x, z) + f(y, z)$
(B2) $f(x, z + w) = f(x, z) + f(x, w)$
(B3) $f(ax, z) = af(x, z)$
(B4) $f(x, az) = af(x, z)$.

Esimerkiksi reaaliavaruuden pistetulo on bilineaarinen kuvaus $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Yleisessä tapauksessa modulien M ja N ei kuitenkaan tarvitse olla samat. Huomaa, että bilineaarisessa kuvauksessa pätevät kaavat $f(x, 0) = 0$ ja $f(0, y) = 0$, sillä esimerkiksi $f(x, 0) = f(x, 0.0) = 0.f(x, 0) = 0$.

Olkoot M ja N mielivaltaisia R-moduleja. Ryhdytään konstruoimaan modulia T, jolle voidaan määritellä bilineaarinen kuvaus $M \times N \to T$, $(x, y) \mapsto x \otimes y$. Ideana on lähteä liikkeelle modulista, jonka alkioita ovat parien (x, y) muodostamat lineaarikombinaatiot. Näitä pareja voidaan pitää muodollisina tuloina. Sen jälkeen samastetaan alkioita niin, että bilineaarisuusehdot täyttyvät: esimerkiksi jokainen pari $(x + y, z)$ samastetaan lineaarikombinaation $(x, z) + (y, z)$ kanssa.

Olkoon C vapaa R-moduli $R^{(M \times N)}$. Tämän modulin luonnollisen kannan muodostavat alkioperheet $e_{(x,y)}$, missä $(x, y) \in M \times N$. Kuten tapana on, samastetaan jokainen kanta-alkio vastaavan parin (x, y) kanssa. Tällöin C koostuu kyseisten parien lineaarikombinaatioista, joiden kertoimet ovat renkaassa R. Tarkastellaan seuraavia neljää muotoa olevia lineaarikombinaatioita, missä $x, y \in M$, $z, w \in N$ ja $a \in R$:

$$
\begin{aligned}
&(x + y, z) - (x, z) - (y, z) \\
&(x, z + w) - (x, z) - (x, w) \\
&(ax, z) - a(x, z) \\
&(x, az) - a(x, z).
\end{aligned}
$$

Olkoon D se C:n alimoduli, jonka virittävät yllä mainitut lineaarikombinaatiot.

MÄÄRITELMÄ 8.7. R-modulien M ja N *tensoritulo* $M \otimes_R N$ on tekijämoduli C/D, missä $C = R^{(M\times N)}$ ja D on edellä määritelty alimoduli. Jos kerroinrengas on asiayhteydestä selvä, tensorituloa voidaan merkitä myös $M \otimes N$.

Parin (x, y) ekvivalenssiluokkaa tekijämodulissa C/D merkitään $x \otimes y$. (Tämä on oikeastaan perheen $e_{(x,y)}$ ekvivalenssiluokka, mutta tämä perhe samastettiin parin (x, y) kanssa.) Koska parit (x, y) virittävät vapaan modulin C, niiden ekvivalenssiluokat virittävät modulin C/D. Jokainen tensoritulon $M \otimes N$ alkio voidaan siis esittää alkioiden $x \otimes y$ lineaarikombinaationa. Tensorituloon liittyy kanoninen kuvaus $\eta : M \times N \to M \otimes N$, jolle pätee $\eta(x, y) = x \otimes y$. Kanoninen kuvaus on R-bilineaarinen.

ESIMERKKI 8.8. Oletetaan, että m ja n ovat keskenään jaottomia luonnollisia lukuja, ja tarkastellaan $\mathbb{Z}$-modulien $\mathbb{Z}_m$ ja $\mathbb{Z}_n$ tensorituloa. Koska m ja n ovat keskenään jaottomat, löytyy kokonaisluvut a ja b, joille pätee $am+bn = 1$. Tällöin alkiolle $\overline{x} \otimes \overline{y} \in \mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n$ pätee

$$\begin{aligned}\overline{x} \otimes \overline{y} &= (am + bn).(\overline{x} \otimes \overline{y}) = am.(\overline{x} \otimes \overline{y}) + bn.(\overline{x} \otimes \overline{y}) \\ &= a.(m\overline{x} \otimes \overline{y}) + b.(\overline{x} \otimes n\overline{y}) = a.(\overline{0} \otimes y) + b.(x \otimes \overline{0}) = 0.\end{aligned}$$

Koska tensoritulon jokainen virittäjäalkio on nolla, tensoritulo on triviaali moduli.

Tensoritulon ominaisuuksia todistettaessa ei ole yleensä tarpeellista palata tensoritulon määritelmään, vaan voidaan käyttää seuraavaa universaaliominaisuutta.

LAUSE 8.9. *Olkoot M, N ja P jotain R-moduleja, ja olkoon $f : M \times N \to P$ jokin R-bilineaarinen kuvaus R-modulille P. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen R-lineaarinen kuvaus $\varphi : M \otimes_R N \to P$, jolle pätee $\varphi(x \otimes y) = f(x, y)$ kaikilla $x \in M$ ja $y \in N$, eli oheinen kaavio kommutoi.*

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\eta"'] & & P \\ & M \otimes_R N \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

TODISTUS. Koska parit (x, y), missä $x \in M$ ja $y \in N$, muodostavat vapaan modulin $C = R^{(M\times N)}$ kannan, kuvaus f voidaan laajentaa lineaarikuvaukseksi $g : C \to P$ yksikäsitteisesti vapaan modulin universaaliominaisuuden perusteella. Olkoon u jokin tensoritulon konstruktiossa määritellyn alimodulin D virittäjäalkio. Tällöin $g(u) = 0$, koska f on bilineaarinen: esimerkiksi jos $u = (ax, y)-a(x, y)$, niin

$$g(u) = g\big((ax, y) - a(x, y)\big) = g(ax, y) - ag(x, y) = f(ax, y) - af(x, y) = 0.$$

Koska $g(u) = 0$ jokaisella D:n virittäjällä u, niin $D \subset \operatorname{Ker} f$. Siispä on olemassa yksikäsitteinen R-modulien homomorfismi $\varphi : C/D \to P$, jolle pätee $g = \varphi \circ \pi$, missä π on kanoninen surjektio. Nyt kaikilla $(x, y) \in M \times N$ pätee $x \otimes y = \pi(x, y)$, joten

$$\varphi(x \otimes y) = \varphi(\pi(x, y)) = g(x, y) = f(x, y).$$

$\square$

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota"'] & P \\
C \arrow[ur, dashed, "g"] \arrow[r, "\pi"'] & C/D \arrow[u, dashed, "\varphi"']
\end{tikzcd}$$

KUVA 15. Lauseen 8.9 todistukseen liittyvä kommutoiva kaavio. Yläkolmio saadaan vapaan modulin universaaliominaisuudesta ja alakolmio modulien homomorfialauseesta. Kuvaus ι on inkluusiokuvaus, ja $\eta = \pi \circ \iota$.

ESIMERKKI 8.10. Universaaliominaisuuden perusteella ei ole olemassa mitään epätriviaalia $\mathbb{Z}$-bilineaarista kuvausta joukolta $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ annetulle modulille P. Jos näet $f : \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \to P$ on bilineaarinen, täytyy olla olemassa lineaarikuvaus $\varphi : \mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \to P$, jolle $\varphi \circ \eta = f$. Aiemmin nähtiin, että $\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n = 0$, joten kuvauksen φ täytyy olla nollakuvaus. Tästä seuraa, että myös f on nollakuvaus.

Seuraavassa lauseessa luetellaan joitakin tensoritulon ominaisuuksia.

LAUSE 8.11. *Olkoot M, N ja P kolme R-modulia. Tällöin on olemassa seuraavat yksikäsitteiset R-modulien isomorfismit:*

i) $M \otimes N \cong N \otimes M$, *missä* $x \otimes y \mapsto y \otimes x$

ii) $(M \otimes N) \otimes P \cong M \otimes (N \otimes P)$, *missä* $(x \otimes y) \otimes z \mapsto x \otimes (y \otimes x)$

iii) $(M \oplus N) \otimes P \cong (M \otimes P) \oplus (N \otimes P)$, *missä* $(x, y) \otimes z \mapsto (x \otimes z, y \otimes z)$

iv) $R \otimes M \cong M$, *missä* $a \otimes x \mapsto a.x$.

Viimeisessä kohdassa rengasta R ajatellaan R-modulina.

TODISTUS. Todistetaan kohta (i) ja jätetään muut harjoitustehtäviksi. Määritellään kuvaukset $f : M \times N \to N \otimes M$ ja $g : N \times M \to M \otimes N$ kaavoilla

$$f(x, y) = y \otimes x \qquad \text{ja} \qquad g(y, x) = x \otimes y.$$

Nämä kuvaukset ovat selvästi bilineaarisia, joten lauseen 8.9 perusteella on olemassa yksikäsitteiset lineaarikuvaukset $\varphi : M \otimes N \to N \otimes M$ ja $\psi : N \otimes M \to M \otimes N$, joille pätee $\varphi(x \otimes y) = f(x, y) = y \otimes x$ ja $\varphi(y \otimes x) = g(y, x) = x \otimes y$ kaikilla $x \in M$ ja $y \in N$. Lisäksi $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$ ja $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$, joten φ ja ψ ovat toistensa käänteiskuvauksia ja siten isomorfismeja. $\square$

Huomautus. Edellistä lausetta voi tulkita siten, että R-modulit muodostavat ikäänkuin oman algebrallisen struktuurinsa, joiden laskutoimitukset $\oplus$ ja $\otimes$ toteuttavat lauseessa mainitut kohdat (i)–(iv). Kertolaskun $\otimes$ "neutraalialkio" on kerroinrengas R.

Osoittautuu, että universaaliominaisuus määrittelee tensoritulon isomorfiaa vaille täydellisesti. Universaaliominaisuutta voidaan tämän vuoksi käyttää määritelmän sijasta tensorituloon liittyvissä todistuksissa.

LAUSE 8.12. *Olkoot M, N, Q kolme R-modulia, ja olkoon g jokin R-bilineaarinen kuvaus $M \times N \to Q$. Oletetaan, että* $\operatorname{Im} g$ *virittää modulin Q ja että seuraava* *sääntö on voimassa: jos f on mikä tahansa R-bilineaarinen kuvaus tulolta $M \times N$ modulille P, niin on olemassa sellainen R-lineaarinen kuvaus $\psi : Q \to P$, että $f = \psi \circ g$. Tällöin $Q \cong M \otimes_R N$, ja isomorfismille pätee $g(x, y) \mapsto x \otimes y$.*

TODISTUS. Koska kuvaus g on bilineaarinen, tensoritulon universaaliominaisuuden perusteella löytyy lineaarikuvaus $\varphi : M \otimes N \to Q$, jolle $\varphi \circ \eta = g$. Toisaalta kanoninen kuvaus η on bilineaarinen, joten oletuksen nojalla löytyy lineaarikuvaus $\psi : Q \to M \otimes N$, jolle pätee $\psi \circ g = \eta$.

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\eta"'] & & Q \\ & M \otimes N \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \times N \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, "g"'] & & M \otimes N \\ & Q \arrow[ur, dashed, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Osoitetaan, että φ on kuvauksen ψ käänteiskuvaus. Selvästi $\mathrm{id} = \mathrm{id}_{M \otimes N}$ on R-lineaarinen kuvaus, jolle pätee $\mathrm{id} \circ \eta = \eta$. Toisaalta myös $\psi \circ \varphi$ on R-lineaarinen, ja

$$(\psi \circ \varphi) \circ \eta = \psi \circ g = \eta.$$

Tensoritulon universaaliominaisuuden mukaan tällaisia kuvauksia voi olla vain yksi, joten $\mathrm{id} = \psi \circ \varphi$.

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, "\eta"'] & & M \otimes N \\ & M \otimes N \arrow[ur, shift left, "\mathrm{id}"] \arrow[ur, shift right, "\psi\circ\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Olkoon sitten $u \in Q$ mielivaltainen. Koska kuvajoukko $\operatorname{Im} g$ virittää modulin Q, voidaan kirjoittaa $u = \sum_i g(x_i, y_i)$ joillain $x_i \in M$ ja $y_i \in N$. Toisaalta nähdään, että

$$(\varphi \circ \psi) \circ g = \varphi \circ \eta = g,$$

joten

$$(\varphi \circ \psi)(u) = \sum_i (\varphi \circ \psi)(g(x_i, y_i)) = \sum_i g(x_i, y_i) = u.$$

Näin ollen $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$, ja φ on kuvauksen ψ käänteiskuvaus. Siispä $\psi : Q \to M \otimes N$ on R-modulien isomorfismi, jolle pätee $\psi(g(x, y)) = \eta(x, y) = x \otimes y$. $\square$

ESIMERKKI 8.13. Olkoon R jokin rengas. Tarkastellaan vapaita tulomoduleja R^n ja R^m. Merkitään symbolilla $R^{n \times m}$ joukkoa, jonka alkioita ovat R-kertoimiset $n \times m$-matriisit. Nämä matriisit muodostavat vapaan R-modulin. Sen luonnollisena kantana ovat alkeismatriisit E_{ij}, joissa rivin i sarakkeessa j on ykkösalkio ja muualla 0. Alkioiden $x = (x_1, \ldots, x_m)$ ja $y = (y_1, \ldots, y_m)$ *dyaditulo* tai *ulkotulo* $g(x, y)$ määritellään matriisina

$$g(x, y) = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_m \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_m \\ \vdots & & & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_m \end{bmatrix}.$$

Kuvaus $g : R^n \times R^m \to R^{n \times m}$ on R-bilineaarinen.

Osoitetaan, että $R^{n\times m} \cong R^n \otimes R^m$ käyttämällä lausetta 8.12. Selvästi $\operatorname{Im} g$ virittää modulin $R^{n\times m}$, sillä $g(e_i, e_j) = E_{ij}$. Olkoon sitten $f : R^n \times R^m \to P$ bilineaarinen kuvaus jollekin R-modulille P. Määritellään kuvaus φ alkeismatriiseilta moduliin P seuraavasti:

$$\varphi(E_{ij}) = f(e_i, e_j).$$

Vapaan modulin universaaliominaisuuden nojalla φ voidaan laajentaa yksikäsitteisellä tavalla koko modulin $R^{n\times m}$ lineaarikuvaukseksi. Jos $A = (a_{ij}) \in R^{n\times m}$, niin

$$\varphi(A) = \varphi\left(\sum_{i,j} a_{ij}E_{ij}\right) = \sum_{i,j} a_{ij} f(e_i, e_j).$$

Täten

$$\varphi(g(x, y)) = \sum_{i,j} x_i y_j f(e_i, e_j) = f\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j\right) = f(x, y)$$

kaikilla $(x, y) \in R^n \times R^m$. Siispä $f = \varphi \circ g$, joten lauseesta 8.12 saadaan, että $R^{n\times m} \cong R^n \otimes R^m$. Dyadituloa $g(x, y)$ vastaa tensoritulo $x \otimes y$.

Nyt nähdään, että reaaliavaruuksien tensoritulo tosiaan yleistää tavallisia piste- ja ristituloja. Pistetulo $x \cdot y$ saadaan matriisista $A = x \otimes y$ lineaarisella kuvauksella $A \mapsto \sum_i A_{ii}$, joka summaa yhteen kaikki lävistäjäalkiot. Ristitulo puolestaan saadaan kuvauksella

$$A \mapsto (A_{23} - A_{32},\, A_{31} - A_{13},\, A_{12} - A_{21}),$$

joka myös on $\mathbb{R}$-lineaarinen.

Tarkastellaan lopuksi erästä tensoritulojen sovellusta, jota nimitetään *skalaarien laajennukseksi*. Olkoot R ja S renkaita ja olkoon $f : R \to S$ rengashomomorfismi. Nyt rengasta S voidaan ajatella R-modulina, kun skalaarikertolasku määritellään kaavalla $a.b = f(a) \cdot b$. Jos M jokin R-moduli, niin voidaan muodostaa tensoritulo

$$M_S = S \otimes_R M.$$

Tämä tensoritulo on S-moduli, kun määritellään $b'.(b \otimes x) = (b'b) \otimes x$ kaikilla alkioilla $b, b' \in S$ ja $x \in M$. Sanotaan, että M_S on saatu modulista M *skalaareja laajentamalla*. Usein R on itse asiassa renkaan S alirengas, ja $f : R \to S$ on inkluusiokuvaus. Jos $S = R$ ja f on identtinen kuvaus, niin $M_R \cong M$ lauseen 8.11 perusteella.

LEMMA 8.14. *Jos $M = R^n$, missä $n \in \mathbb{N}$, niin M_S ja S^n ovat isomorfisia S-moduleina.*

TODISTUS. Harjoitustehtävä. □

LAUSE 8.15. *Jokaisella vaihdannaisella renkaalla R pätee, että jos R^m ja R^n ovat isomorfisia R-moduleja, niin $m = n$.*

TODISTUS. Merkitään $M = R^m$ ja $N = R^n$, ja oletetaan, että $M \cong N$. Olkoon K renkaan R osamääräkunta. (Osamääräkunta on R:n jakorengas joukon $R \setminus \{0\}$

suhteen. Tämä on kunta, koska R on vaihdannainen.) Kunnasta K saadaan R-moduli kanonisen kuvauksen $\eta : R \to K$ avulla. Edellisen lemman perusteella

$$K^m \cong M_K \cong N_K \cong K^n.$$

Yllä olevat isomorfismit ovat K-vektoriavaruuksien isomorfismeja. Koska vektoriavaruuden dimensio on yksikäsitteinen, $m = n$. $\square$