5. Ryhmän kompositiotekijät

Ratkeavan ryhmän käsite kuuluu historiallisesti ensimmäisiin varsinaisen ryhmäteorian käsitteisiin. Évariste Galois todisti vuonna 1831, että polynomiyhtälöön liittyy aina tietty symmetriaryhmä, joka permutoi polynomin juuria, ja mahdollinen ratkaisukaava saadaan tietynlaisesta jonosta tuon symmetriaryhmän aliryhmiä. Ryhmää, jolla on tällainen jono, kutsutaan ratkeavaksi juuri tästä syystä.

5.1. Ratkeavat ryhmät.

Määritelmä 5.1. Ryhmän G *normaali jono* on jono aliryhmiä G_i, joille pätee

$$G = G_0 \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq G_2 \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq G_n = 1.$$

Tekijäryhmiä G_{i+1}/G_i kutsutaan jonon *tekijöiksi*. Jonon *pituus* on jonon aitojen inkluusioiden lukumäärä, joka on sama kuin epätriviaalien tekijöiden määrä.

Huom. Tässä ja muissakin yhteyksissä tyydytään yleensä merkitsemään triviaalia ryhmää symbolilla 1, jättämällä siis joukkosulkeet pois. Samaten normaalin jonon tekijöitä merkitään yleensä vain isomorfiatyypin mukaan; ei siis tehdä eroa esimerkiksi ryhmien A_3 ja $\mathbb{Z}_3$ välillä.

Ryhmällä voi olla useita erilaisia normaaleja jonoja, joissa voi myös olla eri tekijät. Esimerkiksi ryhmällä S_4 on muun muassa normaalit jonot $S_4 \triangleright A_4 \triangleright 1$ ja $S_4 \triangleright V_4 \triangleright 1$. Edellisen tekijät ovat (isomorfiaa vaille) C_2 ja A_4, jälkimmäisen S_3 ja V_4.

Kaikkien normaalin jonon jäsenten ei tarvitse olla normaaleja ryhmässä G. Normaalius ei nimittäin ole transitiivinen ominaisuus: esimerkiksi

$$D_8 \triangleright \langle \rho^2, \sigma \rangle \triangleright \langle \sigma \rangle \triangleright 1$$

on normaali jono, mutta $\langle \sigma \rangle$ ei ole normaali ryhmässä D_8.

Esimerkki 5.2. Normaalin jonon tekijät ovat tietyssä mielessä tulon tekijöiden yleistys. Jos nimittäin G on aliryhmiensä H ja K suora tulo, eli $G \cong H \times K$, niin G:llä on normaali jono $G \triangleright H \triangleright 1$. Lisäksi $G/H \cong K$ (1. isomorfialauseen nojalla), joten normaalin jonon tekijät ovat samat kuin tulon tekijät H ja K. Sama pätee yleisemminkin: jos $G = HN$, missä $H \cap N = 1$ ja $N \trianglelefteq G$, niin jonon $G \triangleright N \triangleright 1$ tekijät ovat H ja N.

Jonon tekijät eivät kuitenkaan aina vastaa mitään tuloa. Esimerkiksi neljän alkion syklisellä ryhmällä $C_4 = \langle g \rangle$ on normaali jono $C_4 \triangleright \langle g^2 \rangle \triangleright 1$, jonka molemmat tekijät ovat isomorfisia ryhmän C_2 kanssa. Ryhmä C_4 kuitenkin sisältää vain yhden C_2:n kanssa isomorfisen aliryhmän, joten se ei voi olla kahden tällaisen tekijän tulo.

Ratkeavalla ryhmällä täytyy olla tietyntyyppinen normaali jono.

Määritelmä 5.3. Ryhmää sanotaan *ratkeavaksi*, jos sillä on normaali jono, jonka kaikki tekijät ovat vaihdannaisia ryhmiä.

Selvästi kaikki vaihdannaiset ryhmät ovat ratkevia, koska triviaalin jonon $G \trianglelefteq 1$ ainoa tekijä on vaihdannainen. Myös kaikki diedriryhmät ja kaikki äärelliset p-ryhmät ovat ratkeavia. Symmetriset ryhmät S_3 ja S_4 ovat ratkeavia, sillä niillä on normaalit jonot $S_3 \triangleright A_3 \triangleright 1$ ja $S_4 \triangleright A_4 \triangleright V_4 \triangleright 1$, joiden tekijät ovat vaihdannaisia. Sen sijaan S_n ja A_n eivät ole ratkeavia, mikäli $n \geq 5$. Tähän palataan myöhemmin.

5.2. Kompositiojonot. Koska normaalius ei ole transitiivinen ominaisuus, normaalin jonon osajono ei välttämättä ole normaali. Alkuperäisen jonon jäsenten väliin voidaan kuitenkin usein lisätä sopivia alkioita niin, että saadaan uusi normaali jono.

MÄÄRITELMÄ 5.4. Normaalia jonoa (H_i) sanotaan jonon (G_i) *hienonnukseksi*, mikäli se sisältää kaikki jonon (G_i) jäsenet, eli (G_i) on jonon (H_i) osajono.

MÄÄRITELMÄ 5.5. Jos ryhmän normaalilla jonolla ei ole triviaaleja tekijöitä, mutta kaikilla sen hienonnuksilla on, jonoa kutsutaan ryhmän *kompositiojonoksi.*

Kompositiojono on siis tietyllä tavalla maksimaalinen normaali jono. Aiemmin mainittu jono $S_4 \rhd A_4 \rhd V_4 \rhd 1$ ei ole kompositiojono, sillä ryhmällä V_4 on epätriviaali normaali aliryhmä C_2. Jonon loppupäätä voidaan siis hienontaa seuraavasti: $\cdots \rhd V_4 \rhd C_2 \rhd 1$. Toisaalta jono $S_3 \rhd A_3 \rhd 1$ on kompositiojono, sillä sitä ei voida hienontaa ottamatta mukaan triviaaleja tekijöitä.

Normaalin jonon tekijöitä voidaan verrata kokonaisluvun tekijöihin. Oletetaan, että $n = m_1 \cdot m_2$. Jos jompikumpi tekijöistä ei ole alkuluku, se voidaan edelleen jakaa pienempiin tekijöihin. Lopulta saavutetaan kyseisen luvun alkutekijähajotelma $n = p_1 p_2 \ldots p_r$, jonka tekijöitä ei voi enää jakaa epätriviaalilla tavalla. Kompositiojono vastaa tällaista alkutekijähajotelmaa. Osoittautuu nimittäin, että ryhmän kompositiotekijät ovat järjestystä vaille yksikäsitteiset. On kuitenkin huomattava, että toisin kuin kokonaislukujen tapauksessa, kahdella ryhmällä voi olla samat kompositiotekijät, vaikka ryhmät eivät olisi isomorfiset.

Osoitetaan seuraavaksi, että alkutekijähajotelman alkulukuja vastaavat normaalin jonon *yksinkertaiset* tekijät. Ryhmää kutsutaan yksinkertaiseksi, jos se on epätriviaali eikä sillä ole aitoja epätriviaaleja normaaleja aliryhmiä.

LAUSE 5.6. *Ryhmän G normaali jono (G_i) on kompositiojono, jos ja vain jos sen tekijät ovat yksinkertaisia.*

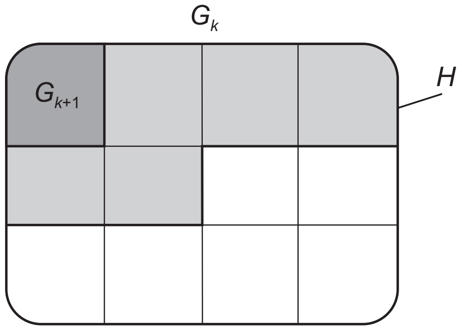
TODISTUS. Oletetaan ensin, että normaali jono (G_i) ei ole kompositiojono eli että $G_k \rhd H \rhd G_{k+1}$ jollain k. Noetherin toisesta isomorfialauseesta seuraa tällöin, että $H/G_{k+1} \lhd G_k/G_{k+1}$, ja koska H/G_{k+1} ei ole triviaali, tekijä G_k/G_{k+1} ei ole yksinkertainen.

Oletetaan sitten, että jokin tekijä G_k/G_{k+1} ei ole yksinkertainen eli että pätee $H \lhd G_k/G_{k+1}$ jollain $H \neq \{1\}$. Olkoon $\pi : G_k \to G_k/G_{k+1}$ kanoninen surjektio. Tarkastellaan alkukuvaa $H' = \pi^{-1}H$ (ks. kuva 10). Tämä on normaali ryhmässä G_k, koska H on normaali maalijoukossa. Toisaalta ryhmä G_{k+1} on normaali H':ssa, koska se on normaali suuremmassa ryhmässä G_k. Siispä $G_k \trianglerighteq H' \trianglerighteq G_{k+1}$. Lisäksi, koska π on surjektio, pätee $\pi H' = H$. Tällöin nähdään helposti, että $H' \neq G_k$, koska $H \neq G_k/G_{k+1}$, ja $H' \neq G_{k+1}$, koska $H \neq \{1\}$. Näin ollen jono (G_i) ei ole kompositiojono. □

Aiemmin hienonnettu jono

$$S_4 \rhd A_4 \rhd V_4 \rhd C_2 \rhd 1$$

on kompositiojono, sillä sen tekijät ovat C_2, C_3, C_2 ja C_2, jotka ovat kaikki yksinkertaisia.



KUVA 10. Tekijän normaalista aliryhmästä saadaan uusi aliryhmä jonon jäsenten G_k ja G_{k+1} väliin.

Epätriviaalilla äärellisellä ryhmällä on aina kompositiojono. Tämä löydetään lähtemällä hienontamaan normaalia jonoa $G \rhd 1$. Jokaisesta uudesta syntyvästä tekijästä H etsitään aito epätriviaali normaali aliryhmä K. Tämä aliryhmä nostetaan kanonisen surjektion avulla alkuperäisen jonon jäseneksi, ja uusiksi tekijöiksi saadaan K ja siihen liittyvä tekijäryhmä H/K. Hienonnusta jatketaan niin kauan kuin tekijöistä löytyy normaaleja aliryhmiä. Lopulta tekijät ovat kaikki yksinkertaisia, jolloin saatu jono on kompositiojono. Koska ryhmä on äärellinen, prosessi päättyy varmasti.

Jos vaihdannaisella ryhmällä on kompositiojono, sen tekijät ovat yksinkertaisia vaihdannaisia ryhmiä. On melko helppo nähdä, että tällaiset ryhmät ovat äärellisiä syklisiä ryhmiä, joiden kertaluku on alkuluku. Koska alkuperäisen ryhmän kertaluku on tekijöiden kertalukujen tulo, tämä osoittaa, että äärettömällä vaihdannaisella ryhmällä ei voi olla kompositiojonoa. Myös jokaisella äärellisellä ratkeavalla ryhmällä on jokin kompositiojono, jonka tekijät ovat muotoa C_p, sillä vaihdannaisia tekijöitä pilkkomalla on päädyttävä lopulta yksinkertaisiin vaihdannaisiin ryhmiin.

Epävaihdannaisella äärettömällä ryhmällä voi olla tai olla olematta kompositiojono. Esimerkiksi ryhmän $\mathbb{Z}$ jokainen aliryhmä on muotoa $n\mathbb{Z}$. Viimeistä edelliseksi kompositiotekijäksi jäisi siis väistämättä jokin tällainen aliryhmä, ja koska $n\mathbb{Z}$ ei ole yksinkertainen, tämä on ristiriita. Toisaalta esimerkiksi reaalitason lineaarikuvaukset, joiden determinantti on 1, muodostavat ryhmän $SL_2(\mathbb{R})$, ja tällä on kompositiojono $SL_2(\mathbb{R}) \rhd \{I, -I\} \rhd \{I\}$. Jonon ensimmäinen tekijä on *projektiivisten* kuvausten ryhmä $PSL_2(\mathbb{R})$, joka on yksinkertainen (todistus sivuutetaan).

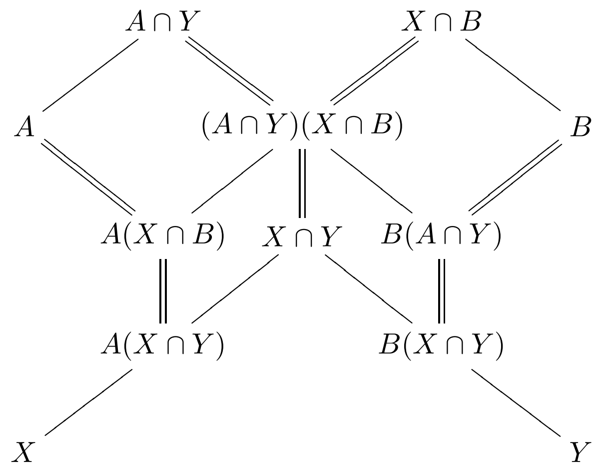
5.3. Kompositiotekijöiden yksikäsitteisyys. Ranskalainen matemaatikko Camille Jordan todisti vuonna 1868, että äärellisen ryhmän kompositiotekijöiden kertaluvut ovat yksikäsitteiset, ja saksalainen Otto Hölder täydensi tulosta vuonna 1889 näyttämällä, että itse tekijät ovat isomorfiaa vaille samat. Tulos pätee myös sellaisille äärettömille ryhmille, joilla on kompositiojono. Ryhdytään seuraavaksi osoittamaan tätä tulosta.

MÄÄRITELMÄ 5.7. Ryhmän kaksi normaalia jonoa ovat *ekvivalentit*, jos niiden kompositiotekijöiden välillä on bijektio φ, jolle pätee $\varphi(A) \cong B$.

Sen osoittamiseksi, että tietyn ryhmän kaikki kompositiojonot ovat keskenään ekvivalentteja, näytetään, että kahdella normaalilla jonolla on aina ekvivalentit hienonnukset. Koska kompositiojonoilla ei ole epätriviaaleja hienonnuksia, niiden on itse oltava toistensa kanssa ekvivalentteja. Ensin on kuitenkin todistettava seuraava tekninen aputulos.

Lemma 5.8 (Zassenhausin perhoslemma). *Olkoot A, B, X ja Y ryhmän G aliryhmiä. Oletetaan, että $A \trianglelefteq X$ ja $B \trianglelefteq Y$. Tällöin*
$$A(X \cap B) \trianglelefteq A(X \cap Y) \quad \textit{ja} \quad B(A \cap Y) \trianglelefteq B(X \cap Y),$$
ja lisäksi tekijäryhmille pätee
$$\frac{A(X \cap Y)}{A(X \cap B)} \cong \frac{B(X \cap Y)}{B(A \cap Y)}.$$

Oheisessa Hassen kaaviossa näkyvät lemmaan liittyvien ryhmien keskinäiset sisältyvyyssuhteet (ryhmät suurenevat ylhäältä alaspäin). Kaksoisviiva merkitsee normaalia aliryhmää, ja yhdensuuntaiset kaksoisviivat viittaavat isomorfisiin tekijäryhmiin. Ylemmät suunnikkaat (etusiivet) perustuvat suoraan 1. isomorfialauseeseen. Alemmat suunnikkaat (takasiivet) puolestaan vastaavat lemman sisältöä.



Kuva 11. Zassenhausin perhonen

Todistus. Merkitään $D = (A \cap Y)(X \cap B)$ ja osoitetaan, että
$$\frac{A(X \cap Y)}{A(X \cap B)} \cong \frac{X \cap Y}{D}.$$
Ensin todetaan, että koska $A \trianglelefteq X$, niin $A \cap Y \trianglelefteq X \cap Y$. Samoin $X \cap B \trianglelefteq X \cap Y$. Tästä seuraa helposti, että myös tulo $(A \cap Y)(X \cap B)$ on normaali ryhmässä $X \cap Y$.

Määritellään $f : A(X \cap Y) \to (X \cap Y)/D$ kaavalla $f(az) = zD$, missä $a \in A$ ja $z \in X \cap Y$. Tämä f on selvästi surjektiivinen. Homomorfisuuden osoittamiseksi otetaan alkiot $a_1, a_2 \in A$ ja $z_1, z_2 \in (X \cap Y)$. Koska $A \trianglelefteq X$ ja $z_1 \in X$, nähdään, että $z_1 a_2 = a' z_1$ jollain $a' \in A$. Nyt
$$f(a_1 z_1 \cdot a_2 z_2) = f(a_1 a' \cdot z_1 z_2) = (z_1 z_2)D,$$

joten f on homomorfismi.

Osoitetaan vielä, että kuvauksen f ydin on $A(X \cap B)$, jolloin haluttu tulos seuraa homomorfialauseesta. Jos $a \in A$ ja $z \in X \cap B$, niin erityisesti $z \in D$, joten $f(az) = D$ eli $az \in \operatorname{Ker} f$. Toisaalta, jos $f(az) = D$ eli $z \in D$, niin $z = yx$ joillain $y \in A \cap Y$ ja $x \in X \cap B$. Tällöin $ay \in A$, joten $az = ayx \in A(X \cap B)$. Näin ollen $\operatorname{Ker} f = A(X \cap B)$.

Samalla tavoin voidaan osoittaa, että $B(X \cap Y)/B(A \cap Y) \cong (X \cap Y)/D$, ja lemman väite seuraa isomorfian transitiivisuudesta. $\square$

LAUSE 5.9 (Schreierin hienonnuslause). *Ryhmän G millä tahansa kahdella normaalilla jonolla on ekvivalentit hienonnukset.*

TODISTUS. Oletetaan, että G:llä on normaalit jonot

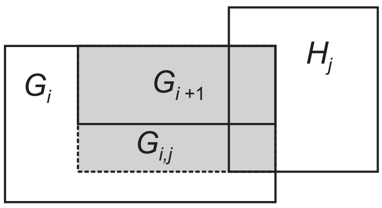
$$G = G_0 \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq G_n = 1$$

ja

$$G = H_0 \trianglerighteq H_1 \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq H_m = 1.$$

Edetään lisäämällä ensimmäisessä jonossa aina kahden jonon peräkkäisen jäsenen väliin "kopio" koko toisesta jonosta. Tarkemmin sanottuna, määritellään aliryhmät $G_{i,j} = G_{i+1}(G_i \cap H_j)$ kaikilla $i \leq n$ ja $j \leq m$. Nyt

$$G_{i,j+1} = G_{i+1}(G_i \cap H_{j+1}) \leq G_{i+1}(G_i \cap H_j) = G_{i,j}.$$



KUVA 12. Hienonnuksen alkio

Asettamalla $A = G_{i+1}$, $X = G_i$, $B = H_{j+1}$ ja $Y = H_j$, saadaan Zassenhausin lemmasta, että $G_{i,j+1} \trianglelefteq G_{i,j}$. Lisäksi

$$G_{i,0} = G_{i+1}(G_i \cap G) = G_i \qquad \text{ja} \qquad G_{i,m} = G_{i+1}(G_i \cap \{1\}) = G_{i+1},$$

joten jono

$$G_{0,0} \trianglerighteq G_{0,1} \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq G_{0,m-1} \trianglerighteq G_{1,0} \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq G_{n-1,0} \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq G_{n-1,m-1} \trianglerighteq 1$$

on jonon (G_i) hienonnus. Samalla tavoin voidaan määritellä $H_{i,j} = H_{j+1}(H_j \cap G_i)$, jolloin saadaan jonon (H_j) hienonnus

$$H_{0,0} \trianglerighteq H_{1,0} \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq H_{n-1,0} \trianglerighteq H_{0,1} \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq H_{0,m-1} \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq H_{n-1,m-1} \trianglerighteq 1.$$

Molemmat hienonnukset sisältävät nm tekijää. Tekijöiden välille voidaan määritellä bijektio $G_{i,j}/G_{i,j+1} \mapsto H_{i,j}/H_{i+1,j}$, ja Zassenhausin lemman avulla nähdään, että toisiaan vastaavat tekijät ovat isomorfiset. $\square$

KOROLLAARI 5.10 (Jordanin-Hölderin lause). *Saman ryhmän kaksi kompositiojonoa ovat aina keskenään ekvivalentit.*

TODISTUS. Edellisen lauseen mukaan kompositiojonoilla on ekvivalentit hienonnukset. Kompositiojonon määritelmän perusteella näiden hienonnusten uudet tekijät ovat kaikki triviaaleja, joten alkuperäiset jonot olivat jo keskenään ekvivalentit. □

Esimerkiksi syklisellä ryhmällä $\mathbb{Z}_{30}$ on muun muassa kompositiojonot

$$\mathbb{Z}_{30} \rhd \langle\overline{3}\rangle \rhd \langle\overline{15}\rangle \rhd 1 \qquad \text{ja} \qquad \mathbb{Z}_{30} \rhd \langle\overline{5}\rangle \rhd \langle\overline{10}\rangle \rhd 1.$$

Ensimmäisen jonon kompositiotekijät ovat järjestyksessä C_3, C_5 ja C_2, ja toisen jonon tekijät ovat C_5, C_2 ja C_3. Molemmissa on siis samat tekijät.

Jordanin-Hölderin lauseen avulla saadaan uusi karakterisointi äärellisen ryhmän ratkeavuudelle. Ratkeavalla ryhmällä on normaali jono, jonka tekijät ovat vaihdannaisia. Aiemmin todettiin, että jos ryhmä on äärellinen, sen vaihdannaisia tekijöitä pilkkomalla saatava kompositiojono sisältää vain syklisiä tekijöitä, joiden kertaluku on alkuluku. Toisaalta Jordanin-Hölderin lauseen perusteella millä tahansa tavalla tuotettu kompositiojono sisältää samat tekijät.

LAUSE 5.11. *Äärellinen ryhmä on ratkeava, jos ja vain jos sillä on normaali jono, jonka tekijät ovat syklisiä ryhmiä, joiden kertaluku on alkuluku.*

5.4. Äärelliset yksinkertaiset ryhmät. Koska jokaisella äärellisellä ryhmällä on kompositiojono, äärellisten ryhmien teoriaa voidaan lähestyä kompositiotekijöiden kautta. Tämä lähestymistapa johtaa kahteen erilliseen kysymykseen: minkälaisia ovat äärelliset yksinkertaiset ryhmät, ja millä tavalla kompositiotekijöistä voidaan saada selville koko ryhmän rakennetta koskevia asioita. Jälkimmäistä kysymystä tutkii niin sanottu *ryhmälaajennosten* teoria. Tarkastellaan erästä tähän liittyvää esimerkkiä.

ESIMERKKI 5.12. Ryhmillä S_3 ja $\mathbb{Z}_6$ on kompositiojonot

$$S_4 \rhd A_3 \rhd 1 \qquad \text{ja} \qquad \mathbb{Z}_6 \rhd \langle\overline{2}\rangle \rhd 1.$$

Molempien jonojen tekijät ovat C_2 ja C_3. Pelkästään kompositiotekijöistä ei voida siis päätellä, mikä ryhmä on kyseessä. Tässä suhteessa ryhmän kompositiojono poikkeaa kokonaisluvun alkutekijähajotelmasta.

Tekijöiden perusteella voidaan kuitenkin päätellä ryhmästä jotakin. Oletetaan, että ryhmällä G on kompositiojono $G \rhd H \rhd 1$, jonka tekijät ovat C_2 ja C_3. Tämä tarkoittaa sitä, että $H = C_3$ ja $C_3 \lhd G$. Koska syt$(2,3) = 1$, aliryhmä C_3 ei voi sisältää alkiota, jonka kertaluku on 2. Tällainen alkio kuitenkin löytyy (esimerkiksi Cauchyn lauseen perusteella), joten $C_2 \leq G$ ja $C_2 \cap C_3 = 1$. Nyt on kaksi mahdollisuutta: voi olla $C_2 \lhd G$, jolloin $G \cong C_2 \times C_3 \cong \mathbb{Z}_6$, tai sitten $C_2 \ntrianglelefteq G$.

Vaikka C_2 ei olisi normaali ryhmässä G, niin joka tapauksessa $G = C_2C_3$. Koska C_3 on normaali, tämä rakenne on niin sanottu *puolisuora tulo*. Puolisuorassa tulossa jokainen alkio voidaan esittää yksikäsitteisessä muodossa ab, missä $a \in C_2$ ja $b \in C_3$. Lisäksi mikä tahansa tulo saadaan kaavasta

$$(a_1b_1)(a_2b_2) = (a_1a_2)\left({}^{a_2^{-1}}b_1b_2\right).$$

Koko puolisuoran tulon rakenne riippuu siis tekijöiden rakenteen lisäksi siitä, millä tavalla ensimmäisen ryhmän alkioilla konjugointi toimii toisessa. Triviaali konjugointi johtaa takaisin suoraan tuloon.

Esimerkin tapauksessa ei ole vaikea osoittaa, että mahdollisia epätriviaaleja konjugointeja on vain yksi: jos $1 \neq a \in C_2$ ja $b \in C_3$, niin ${}^a b = b^{-1}$. Ratkaisemalla tästä ryhmän kertotaulu nähdään, että kyseessä on itse asiassa S_3; esimerkiksi ${}^{(12)}(123) = (132)$. Näin on löydetty kaikki mahdolliset ryhmät, joiden kompositiotekijät ovat C_2 ja C_3.

Jos kompositiotekijöiden kertaluvut eivät ole keskenään jaottomia, on myös sellainen vaihtoehto, että ryhmä ei ole lainkaan tekijöidensä tulo. Tästä nähtiin jo aiemmin esimerkki. Tällaisessa tapauksessa ryhmän rakenteen selvittäminen johtaa hankaliin laajennosteoreettisiin kysymyksiin.

Äärellisten yksinkertaisten ryhmien tunteminen on ensiaskel kaikkien äärellisten ryhmien rakenteen selvittämisessä. Tämän askeleen ottamisen aloitti jo Galois todistamalla seuraavan tuloksen.

LAUSE 5.13. *Alternoivat ryhmät A_n ovat yksinkertaisia, kun $n \geq 5$ tai $n = 3$.*

TODISTUS. (Hahmotelma.) Tapaus A_3 on selvä, joten oletetaan, että $n \geq 5$. Tällöin 3-syklien konjugaattiluokka ei jakaudu ryhmässä A_n, joten kaikki 3-syklit ovat keskenään konjugaatteja. Lisäksi, jos $H \trianglelefteq A_n$, niin H sisältää kaikkien alkioidensa konjugaatit. Jos siis H sisältää jonkin 3-syklin, sen täytyy sisältää kaikki 3-syklit. Toisaalta ei ole vaikea nähdä, että 3-syklit virittävät ryhmän A_n, kun $n \geq 3$. Lauseen tulos saadaan nyt käymällä läpi erilaiset mahdolliset syklityypit ja osoittamalla, että jos H sisältää tietyn syklityypin permutaatioita, se sisältää myös jonkin 3-syklin. □

KOROLLAARI 5.14. *Alternoiva ryhmä A_n on ratkeava, jos ja vain jos $n < 5$.*

TODISTUS. Olemme nähneet, että pienet alternoivat ryhmät ovat ratkeavia. Toisaalta, jos $n \geq 5$, niin ryhmän A_5 kompositiojonossa on vain yksi tekijä, ja se ei ole vaihdannainen. □

Galois'n jälkeen yksinkertaisia ryhmiä löydettiin lisää, ja erinäisten vaiheiden jälkeen 1980-luvulla alettiin uskoa, että kaikki äärelliset yksinkertaiset ryhmät olisi löydetty. Tuloksen todistamiseksi koottiin yhteen satoja artikkeleja, joita jouduttiin korjailemaan ja paikkailemaan, mutta nykyisin näyttää siltä, että todistuksessa ei pitäisi olla aukkoja. Kukaan yksittäinen ihminen ei ole sitä kuitenkaan pystynyt tarkistamaan. Gorenstein, Lyons ja Solomon ovat aloittaneet projektin, jossa he kokoavat todistusta yksiin kansiin, ja kyseisestä projektista on muodostumassa yksitoistaosainen kirjasarja.

LAUSE 5.15 (Äärellisten yksinkertaisten ryhmien luokittelulause). *Jokainen äärellinen yksinkertainen ryhmä kuuluu johonkin seuraavista luokista.*

1. *Sykliset ryhmät C_p, missä p on alkuluku. (Ainoat vaihdannaiset ryhmät.)*
2. *Alternoivat ryhmät A_n, missä $n \geq 5$.*

3.a. *Klassiset Lie-tyypin ryhmät.*
3.b. *Poikkeukselliset Lie-tyypin ryhmät.*
4. *26 sporadista ryhmää. (Ainoa äärellinen luokka.)*

Klassiset Lie-tyypin ryhmät ovat äärellisten vektoriavaruuksien erityyppisten lineaarikuvausten muodostamia ryhmiä, tai oikeammin näiden ryhmien yksinkertaisia kompositiotekijöitä. Esimerkiksi ortogonaaliset tai unitaariset ryhmät kuuluvat näihin. Poikkeukselliset Lie-tyypin ryhmät ovat samanlaisella konstruktiolla saatavia matriisiryhmiä, mutta niihin liittyvän vektoriavaruuden dimensio on rajoitettu. Sporadiset ryhmät ovat ryhmiä, jotka eivät kuulu mihinkään muista luokista. Niistä suurinta nimitetään “hirviöryhmäksi”, ja sen kertaluku on kertaluokkaa $8 \cdot 10^{53}$.