Algebra II
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 13 (viimeinen harjoitus)
to 6.5.2010

1. a) Osoita, että algebrallisten lukujen joukko $\mathbb{A}$ on kunta. (Voit käyttää luennoilla ja tehtävissä todistettuja lauseita.)
   b) Olkoon Ω alkukunnan $\mathbb{F}_p$ algebrallinen sulkeuma. Osoita, että polynomin $X^{p^n} - X$ juurten joukko Ω:ssa on kunta.

2. Osoita, että jokainen algebrallisesti suljettu kunta on ääretön.

3. Etsi seuraavissa tapauksissa jokin polynomin f juurikunta kunnan K suhteen ja selvitä sen aste K:n laajennoksena:
   a) $f = X^3 - 2$, $K = \mathbb{Q}$
   b) $f = X^4 - 7$, $K = \mathbb{Q}$
   c) $f = X^4 - 7$, $K = \mathbb{F}_{11}$.

4. Olkoon Ω kunnan K algebrallinen sulkeuma. Kunnan K algebrallista laajennosta $L \subset \Omega$ kutsutaan *normaaliksi*, jos jokaisella K-automorfismilla $\sigma : \Omega \to \Omega$ pätee $\sigma(L) \subset L$. Osoita, että minkä tahansa polynomijoukon juurikunta K:n suhteen on K:n normaali laajennos.

5. Osoita, että $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \ncong \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ (kuntaisomorfismi).

6. Selvitä seuraavissa tapauksissa laajennoksen L/K Galois'n ryhmä. Jos laajennos on Galois'n laajennos, etsi kaikki välilaajennokset L/M, missä $K \subset M \subset L$.
   a) $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $K = \mathbb{Q}$
   b) $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, $K = \mathbb{Q}$
   c) $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$, $K = \mathbb{Q}$.