

Algebra II

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Harjoitus 8

to 25.3.2010

1. Osoita, että jokainen \mathbb{Z} -modulin \mathbb{Q} vapaa osajoukko sisältää korkeintaan yhden alkion, ja päättelä tästä, että \mathbb{Q} ei ole vapaa ryhmä.
2. Olkoot M ja N jotain R -moduleja. Oletetaan, että modulilla M on kanta B ja $f : B \rightarrow N$ on jokin kuvaus. Olkoon $\varphi : M \rightarrow N$ sellainen R -lineaarinen kuvaus, jolle pätee $\varphi(b) = f(b)$ kaikilla $b \in B$ (vrt. lause 8.2). Osoita, että
 - i) Kuvaus φ on injektio, jos ja vain jos kuvajoukko fB on vapaa.
 - ii) Kuvaus φ on surjektio, jos ja vain jos kuvajoukko fB virittää modulin N .

3. Osoita, että jokainen vaihdannainen ryhmä on jonkin vapaan vaihdannaisen ryhmän tekijäryhmä.

Vihje: Valitse ryhmälle G jokin virittäjäjoukko X ja tarkastele vapaata modulia $\mathbb{Z}^{(X)}$. Käytä homomorfialaisuutta sopivaan lineaarikuvaukseen $\varphi : \mathbb{Z}^{(X)} \rightarrow G$.

4. Olkoon M jokin äärellinen vaihdannainen ryhmä. Kuvaile modulia $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$.
5. Oletetaan, että M , N ja P ovat R -moduleja, ja $\varphi : M \rightarrow N$ on isomorfismi. Todista seuraavat isomorfismit:
 - a) $M \otimes P \cong N \otimes P$, missä $x \otimes y \mapsto \varphi(x) \otimes y$
 - b) $R \otimes M \cong M$, missä $a \otimes x \mapsto a.x$
 - c) $(M \oplus N) \otimes P \cong (M \otimes P) \oplus (N \otimes P)$, missä $(x, y) \otimes z \mapsto (x \otimes z, y \otimes z)$.

Kohdassa (b) rengasta R ajatellaan R -modulina.

Vihje: Konstruoi kohdassa (c) lineaarikuvaukset $\psi_1 : M \otimes P \rightarrow (M \oplus N) \otimes P$, missä $x \otimes z \mapsto (x, 0) \otimes z$, ja $\psi_2 : N \otimes P \rightarrow (M \oplus N) \otimes P$, missä $y \otimes z \mapsto (0, y) \otimes z$. Määrittele sitten $\psi : (M \otimes P) \oplus (N \otimes P) \rightarrow (M \oplus N) \otimes P$ kaavalla $\psi(u, v) = \psi_1(u) + \psi_2(v)$.

6. Tarkastellaan \mathbb{Z} -modulien tensorituloa $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.
 - a) Osoita, että on olemassa \mathbb{Z} -lineaarinen kuvaus $\varphi : \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, jolle pätee $\varphi(x \otimes y) = xy$.
 - b) Osoita, että kuvaus $\psi : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, missä $\psi(x) = x \otimes 1$, on surjektio ja kuvauksen φ käänteiskuvaus.