Algebra II
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 7 (2 sivua)
to 18.3.2010

1. Olkoon R vaihdannainen rengas ja $S^{-1}R$ sen jakorengas osajoukon S suhteen. Todista seuraavat väitteet (lause 6.11):
   (a) $S^{-1}R$ on vaihdannainen rengas, laskutoimituksina $a/b \cdot c/d = (ac)/(bc)$ ja $a/b + c/d = (ad + bc)/(bd)$.
   (b) Kanoninen kuvaus $\eta : a \mapsto a/1$ on rengashomomorfismi.
   (c) Jos $s \in S$, kuva-alkiolla $\eta(s) \in S^{-1}R$ on käänteisalkio.
   (d) Kanoninen kuvaus η on injektio, jos ja vain jos S ei sisällä nollanjakajia.
   (e) $S^{-1}R$ on nollarengas, jos ja vain jos $0 \in S$.

2. Olkoon a renkaan R alkio, jolla ei ole kertolaskun suhteen käänteisalkiota. Osoita, että $\langle a \rangle \neq R$.

3. Olkoon R paikallinen rengas. Osoita, että R:n maksimaalinen ideaali sisältää täsmälleen ne renkaan alkiot, joilla ei ole käänteisalkiota.

4. Olkoon $p = X^2 - Y$, ja olkoon $g \in \mathbb{R}[X, Y]$ jokin toinen polynomi. Todista seuraavat väitteet (vrt. esim. 6.14):
   (a) Polynomi p on jaoton renkaassa $\mathbb{R}[X, Y]$, eli sitä ei voida esittää vakiosta poikkeavien polynomien tulona.
   (b) Polynomi g voidaan kirjoittaa muodossa $g = pq + r$, missä $q \in \mathbb{R}[X, Y]$ ja $r \in \mathbb{R}[X]$.
   (c) Jos polynomeilla g ja p on äärettömän monta yhteistä nollakohtaa (x, y), niin g on jaollinen p:llä.

   Vihje: Jos polynomilla p on vakiosta poikkeavia tekijöitä, niiden on oltava muotoa $aX + bY + c$. Polynomi g voidaan kirjoittaa muodossa $g = \sum_{i=0}^{n} f_i Y^i$, missä $f_i \in \mathbb{R}[X]$ kaikilla i. Käytä induktiota luvun n suhteen (muuttujan Y korkein potenssi).

5. Olkoon G äärellinen vaihdannainen ryhmä. Osoita, että $\mathbb{Z}$-modulina G on eräiden p-ryhmien suora summa. (Muistele ryhmäteorian lauseita.)

6. Olkoon I mielivaltainen indeksijoukko ja olkoon Q sellainen R-moduli, että jokaisella $i \in I$ löytyy R-moduli M_i ja R-lineaarinen kuvaus $g_i : M_i \to Q$. Oletetaan lisäksi, että Q:lle pätee seuraava lause (vrt. suoran summan universaaliominaisuus, lause 7.4): jos N on jokin toinen R-moduli ja kuvaukset $f_i : M_i \to N$ ovat R-lineaarisia kaikilla i, niin on olemassa yksikäsitteinen R-lineaarinen kuvaus $h : Q \to N$, jolle $h \circ g_i = f_i$ kaikilla i.

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "g_i"'] & & N \\ & Q \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Osoita, että Q on isomorfinen suoran summan $\bigoplus_i M_i$ kanssa. Toisin sanoen universaaliominaisuus määrittelee suoran summan isomorfiaa vaille.

Vihje: Käytä oletuksen lausetta ja lausetta 7.4 löytääksesi lineaariset kuvaukset $\theta : \bigoplus_i M_i \to Q$ sekä $h : Q \to \bigoplus_i M_i$. Käytä lauseita sitten alla oleviin kaavioihin osoittaaksesi, että $h \circ \theta = \mathrm{id}$ ja $\theta \circ h = \mathrm{id}$.

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[rr, "\iota_i"] \arrow[dr, "\iota_i"'] & & \bigoplus_i M_i \\ & \bigoplus_i M_i \arrow[ur, "h\circ\theta"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M_i \arrow[rr, "g_i"] \arrow[dr, "g_i"'] & & Q \\ & Q \arrow[ur, "\theta\circ h"'] & \end{tikzcd}$$