Algebra II
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 5
to 25.2.2010

1. Todista seuraavat normaaleihin aliryhmiin liittyvät väitteet.
   (a) Jos $X, Y \leq G$ ja $H \trianglelefteq X$, niin $H \cap Y \trianglelefteq X \cap Y$.
   (b) Jos $H \trianglelefteq G$ ja $K \trianglelefteq G$, niin $HK \trianglelefteq G$.
   (c) Jos $X \trianglelefteq H$ ja $f : G \to H$ on homomorfismi, niin $f^{-1}X \trianglelefteq G$.
   (d) Jos $X \trianglelefteq G$ ja $f : G \to H$ on surjektiivinen homomorfismi, niin $fX \trianglelefteq H$.

2. Osoita että
   (a) jokainen diedriryhmä on ratkeava
   (b) jokainen äärellinen p-ryhmä on ratkeava.

   Vihje: Käytä (b)-kohdassa hyväksi tietoa, että äärellisen p-ryhmän keskus on epätriviaali.

3. Oletetaan, että G on ryhmä, jonka kertaluku on 80. Etsi sen kompositiotekijät ja totea, että se on ratkeava.

4. Olkoon G ryhmä. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:
   (i) G on yksinkertainen ja vaihdannainen.
   (ii) G on äärellinen syklinen ryhmä, jonka kertaluku on alkuluku.

5. Todista *aritmetiikan peruslause*: jokaisella kokonaisluvulla $n > 1$ on esitys alkutekijöiden tulona, ja tämä esitys on tekijöiden järjestystä vaille yksikäsitteinen.

   Vihje: Käytä Jordanin-Hölderin lausetta sykliseen ryhmään C_n.

6. Oletetaan, että G on ryhmä, jonka kertaluku on 10. Todista seuraavat väitteet:
   (a) Jollain $H \cong C_5$ pätee $H \trianglelefteq G$, ja G:n kompositiotekijät ovat C_5 ja C_2. (Voit käyttää Cauchyn lausetta.)
   (b) Jollain $K \cong C_2$ pätee $K \leq G$ ja $K \cap H = \{1\}$.
   (c) Jos $1 \neq a \in K$ ja $b \in H$, niin ${}^a b = b$ tai ${}^a b = b^{-1}$.

   Päättele, että kymmenen alkion ryhmiä on vain 2 erilaista. Mitkä ne ovat?