

Algebra II  
Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Harjoitus 4  
to 18.2.2010

1. Määritä neliön symmetriaryhmän  $D_8$  sisäiset eli konjugoinnista saatavat automorfismit. Minkä ryhmän ne muodostavat? Osoita, että kaikki  $D_8$ :n automorfismit eivät ole sisäisiä.

*Vihje.* Sisäiset automorfismit eivät kuvaa alkioita konjugaattiluokkiensa ulkopuolelle, ja mitkään automorfismit eivät voi muuttaa alkioiden kertalukuja.

2. (a) Olkoon  $G$  ryhmä ja  $Z(G)$  sen keskus. Osoita, että jos tekijäryhmä  $G/Z(G)$  on syklinen, niin  $G$  on vaihdannainen.  
(b) Olkoon  $p$  alkuluku. Osoita, että jokainen ryhmä, jonka kertaluku on  $p^2$ , on vaihdannainen.

*Vihje.* Käytä tietoa, että  $p$ -ryhmän keskus on epätriviaali.

3. Osoita, että mikään ryhmä, jonka kertaluku on 80, ei ole yksinkertainen.
4. Todista Cauchyn lause: jos alkuluku  $p$  jakaa ryhmän  $G$  kertaluvun, niin löytyy alkio  $g \in G$ , jonka kertaluku on  $p$ .
5. Oletetaan, että  $m, n \in \mathbb{N}$  ja  $\text{syt}(m, n) = 1$ . Todista seuraavat väitteet:
- (a) Jos  $am = bn$  joillain  $a, b \in \mathbb{N}$ , niin  $m|b$  ja  $n|a$ .  
(b)  $\mathbb{Z}_{mn} \cong \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ .
6. Olkoon  $G$  ryhmä ja  $H$  ja  $N$  sen aliryhmiä. Jos  $G = HN$ ,  $N \triangleleft G$  ja  $H \cap N = \{1\}$ , ryhmää  $G$  sanotaan aliryhmiensä  $H$  ja  $N$  puolisuoraksi tuloksi. Osoita seuraavat puolisuoran tulon ominaisuudet.
- (i) Jokaisella  $g \in G$  on yksikäsitteinen esitys muodossa  $g = hn$ , missä  $h \in H$  ja  $n \in N$ .  
(ii) Tulo  $h_1n_1 \cdot h_2n_2$ , missä  $h_1, h_2 \in H$  ja  $n_1, n_2 \in N$ , voidaan kirjoittaa muodossa  $h_1h_2 \cdot n'n_2$ , missä  $n' \in N$  riippuu ainoastaan alkioista  $h_2$  ja  $n_1$ .  
(iii)  $G/N \cong H$ .