Algebra II
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 3
to 11.2.2010

1. Määritä ryhmien S_4 ja A_4 konjugaattiluokat ja niiden koot sekä kaikki normaalit aliryhmät.

2. Oletetaan, että permutaation $\sigma \in S_n$ esityksessä erillisten syklien tulona on samanpituisia syklejä tai syklejä, joiden pituus on parillinen. Osoita, että on olemassa $\tau \notin A_n$, jolle pätee ${}^{\tau}\sigma = \sigma$ (eli τ keskittää σ:n).

3. Määritä diedriryhmän D_{2n} konjugaattiluokat ja keskus.

   Vihje: Kaikki diedriryhmän alkiot voidaan kirjoittaa muodossa ρ^j tai $\rho^j\sigma$. Konjugaattiluokkien pitäisi vastata erityyppisiä peilausakseleita ja eri kiertokulmia.

4. Oletetaan, että ryhmä G toimii joukossa X ja että $g, h \in G$ kuuluvat samaan konjugaattiluokkaan. Osoita, että $|\operatorname{Fix}(g)| = |\operatorname{Fix}(h)|$.

5. Laske, kuinka monella erilaisella tavalla säännöllisen kuusikulmion särmät voidaan värittää, jos käytettävissä on 4 väriä.

6. Todista, että kuution symmetriaryhmä on isomorfinen ryhmän S_4 kanssa, ja totea sitten, että kyseisen ryhmän konjugaattiluokat määräytyvät kiertoakselien ja -kulmien perusteella, kuten esimerkissä 3.12 todettiin.

   Vihje: Määrittele kuution symmetriaryhmän luonnollinen toiminta vastakkaisten nurkkien kautta kulkevien lävistäjien joukossa. Osoita, että tämä toiminta on injektiivinen homomorfismi ryhmälle S_4 (ns. *uskollinen* toiminta). Surjektiivisuuden todistamiseksi voit laskea symmetriaryhmän koon lauseen 2.7 avulla.