Algebra II
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 2
to 4.2.2010

Tehtävät 1 ja 2 liittyvät viime viikon tehtävän 3.c) tekijärakenteeseen. Merkitään kyseisen tehtävän tekijämonoidia P (iso ρ-kirjain). Sen alkiot ovat ekvivalenssiluokat $\overline{0}$, $\overline{1}$, ..., $\overline{r+p-1}$. Tarkastellaan P:n erotusmonoidia $E = P \times P/\sim$.

1. Osoita, että kanoninen homomorfismi $\eta : P \to E$, missä $\eta(\overline{a}) = [(\overline{a}, 0)]$, on surjektio, ja että
$$\eta(\overline{a}) = \eta(\overline{b}) \iff a \equiv b \mod p.$$

2. (a) Osoita, että on olemassa monoidihomomorfismi $\overline{f} : P \to \mathbb{Z}_p$, jolle pätee $\overline{f}(\overline{n}) = [n]_p$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Osoita, että on olemassa surjektiivinen homomorfismi $\overline{g} : E \to \mathbb{Z}_p$, jolle pätee $\overline{g}([(\overline{m}, \overline{n})]) = \overline{f}(\overline{m}) - \overline{f}(\overline{n})$ kaikilla $m, n \in \mathbb{N}$.
   (c) Osoita, että $\overline{g}$ on isomorfismi.

3. Oletetaan, että ryhmä G toimii vasemmalta joukossa X. Merkitään symbolilla Y^X kaikkien kuvausten $X \to Y$ joukkoa. Jos $g \in G$ ja $\varphi : X \to Y$, määritellään $\varphi^g : X \to Y$ kaavalla $\varphi^g(x) = \varphi(gx)$. Osoita, että kaava $\varphi \mapsto \varphi^g$ määrittelee G:n oikeanpuoleisen toiminnan kuvausten joukossa Y^X.

4. Oletetaan, että ryhmä G toimii joukossa X. Todista seuraavat väitteet.
   (a) Alkioiden radat muodostavat joukon X osituksen.
   (b) Jokainen rata on homogeeninen G-joukko.
   (c) Alkioiden kiinnittäjät ovat ryhmän G aliryhmiä, mutteivät välttämättä normaaleja. (Tarkastele esim. ryhmän S_3 luonnollista toimintaa kolmen alkion joukossa.)

5. Todista *Cayleyn lause*: Jokainen ryhmä on isomorfinen jonkin permutaatioryhmän kanssa.

   Vihje: Tarkastele kaavan $g.x = gx$ määrittelemää ryhmän toimintaa itsessään.

6. Olkoon p jokin alkuluku ja m positiivinen kokonaisluku. Osoita, että jos ryhmän G kertaluku on p^m, niin sen keskus $Z(G)$ on epätriviaali.

   Vihje: Käytä luokkayhtälöä. Alkio $x \in G$ kuuluu keskukseen, jos ja vain jos $[G : C_G(x)] = 1$.