Algebra II
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 1
to 28.1.2010

1. Olkoon G ryhmä ja H sen aliryhmä. Osoita, että H:n sivuluokat muodostavat G:n osituksen ja että seuraavat ehdot ovat ekvivalentteja:
   (i) $xH = yH$
   (ii) $x \in yH$
   (iii) $x, y \in zH$ jollain $z \in G$.

2. Tarkastellaan jäännösluokkarengasta $\mathbb{Z}_{10} = \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, alkioina jäännösluokat $\overline{n}$ modulo 10 ja laskutoimituksina normaalit jäännösluokkien yhteen- ja kertolaskut. Osoita, että osajoukko $\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}\} \subset \mathbb{Z}_{10}$ on rengas, muttei renkaan $\mathbb{Z}_{10}$ alirengas.

3. Selvitä seuraavissa kohdissa, ovatko annettu (tai annetun osituksen määrittämä) ekvivalenssirelaatio ja laskutoimitus yhteensopivia. Myönteisessä tapauksessa kuvaile tekijästruktuuria. (Tarkista, että relaatiot todella ovat ekvivalensseja, jollet ole varma.)
   (a) Ositus neliöihin ja ei-neliöihin struktuurissa $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$.
   (b) Ositus neliöihin ja ei-neliöihin struktuurissa $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{\overline{0}\}, \cdot)$.
   (c) Struktuurissa $(\mathbb{N}, +)$ seuraava relaatio: Olkoot $p, r \in \mathbb{N}$. Määritellään luvuilla $m, n \in \mathbb{N}$, missä $m \leq n$,
$$m \sim n \iff \begin{cases} m = n, & \text{jos } m < r, \\ m - n = kp \text{ jollain } k \in \mathbb{Z}, & \text{muuten.} \end{cases}$$

4. Todista seuraavat erotusmonoidiesimerkkiin 1.5 liittyvät väitteet:
   (a) Relaatio $\sim$ on laskutoimituksen kanssa yhteensopiva ekvivalenssi.
   (b) Kuvaus $a \mapsto [(a, 0)]$ on injektio, jos ja vain jos jokainen $a \in M$ on supistuva.
   (c) Monoidin $(\mathbb{Z}, \cdot)$ jakomonoidi on triviaali.

5. Oletetaan, että m on luvun n tekijä. Osoita, että on olemassa yksikäsitteinen ryhmähomomorfismi $g : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m$, jolle $g(\overline{1}) = \overline{1}$.

   Vihje: Käytä lausetta 1.14.

6. Todista seuraava versio lauseesta 1.14: Oletetaan, että $f : G \to H$ ja $p : G \to G'$ ovat ryhmähomomorfismeja ja että p on surjektio. Tällöin on olemassa homomorfismi $\overline{f} : G' \to H$, jolle pätee $f = \overline{f} \circ p$, jos ja vain jos $\operatorname{Ker} p \subset \operatorname{Ker} f$.