Kandidaatintutkielma

Epästandardit reaaliluvut

Janne Korhonen

11. tammikuuta 2007

Sisältö

Johdanto

Kun moderni differentiaali- ja integraalilaskenta kehitettiin 1600-luvun lopulla, sen peruskäsitteet muotoiltiin käyttäen ajatusta infinitesimaaleista. Näiden infinitesimaalien ajateltiin olevan ”äärettömän pieniä lukuja” tai tarkemmin sanottuna lukuja, joiden itseisarvo on kaikki tavallisia positiivisia reaalilukuja pienempi. Muuten infinitesimaalit kuitenkin noudattivat tavallisia reaalilukujen laskusääntöjä. Näin esimerkiksi derivaatta määriteltiin erotusosamäärän

$$\frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

arvona, kun h on infinitesimaali.

Infinitesimaalin käsite oli aina hyvin kiistanalainen. Selvästikään reaalilukujen kunnassa ei ole alkioita, jotka voitaisiin tulkita infinitesimaaleiksi, ja uusien alkioiden lisääminen taas rikkoisi monet reaalilukujen ominaisuudet, joten ei ollut selvää, mitä infinitesimaalit oikeastaan olisivat, jos ne ylipäätään edes olivat olemassa. Monet matemaatikot pitivätkin niitä lähinnä hyödyllisinä työkaluina, joita ei kuitenkaan todellisuudessa ollut olemassa. Kaikesta huolimatta infinitesimaalilaskenta muodosti pitkään pohjan differentiaali- ja integraalilaskennalle, kunnes 1800-luvulla ala lopulta formalisoitiin kunnollisesti raja-arvon epsilon-delta-määritelmän avulla. Tämän jälkeen infinitesimaalit katosivat matemaattisesta käytöstä pitkäksi aikaa.

1960-luvulla kiinnostus infinitesimaalilaskentaan kuitenkin heräsi uudelleen. Matematiikko Abraham Robison osoitti matemaattisen logiikan avulla, että on olemassa niin sanotut epästandardit reaaliluvut, jotka voivat toimia pohjana infinitesimaalilaskennalle. Tämä epästandardien reaalilukujen struktuuri on reaalilukuja laajentava kunta, joka sisältää infinitesimaaleja. Lisäksi voidaan osoittaa, että kaikki sopivan kielen predikaattilogiikan lauseet ovat tosia epästandardeilla reaaliluvuilla jos ja vain jos ne ovat tosia tavallisilla reaalilukuja. Näin uudesta struktuurista saatu tieto voidaan palauttaa reaalilukuja koskevaksi tiedoksi.

Tässä kandidaatintutkielmassa esittelemme epästandardien reaalilukujen perusteet. Luvussa 1 osoitamme, että halutunlainen epästandardien reaalilukujen struktuuri on olemassa. Muodostamme sopivan ensimmäisen kertaluvun logiikan aakkoston L ja muodostamme reaaliluvuista L-mallin $\mathcal{R}$. Osoitamme kompaktisuuslauseen avulla, että L-teorialla $\{\phi \mid \phi \text{ on } L\text{-lause ja } \mathcal{R} \models \phi\}$ on malli, joka sisältää infitesimaaleja. Tästä saamme epästandardien reaalilukujen kunnan $^*\mathbb{R}$.

Luvussa 2 tarkastelemme tarkemmin epästandardien reaalilukujen ominaisuuksia. Erityisesti perehdymme infinitesimaaleihin sekä äärettömiin lukuihin. Lopuksi luvussa sovellamme teoriaa perusanalyysiin ja esittelemme epästandardin analyysin perusteita. Esitämme raja-arvolle vaihtoehtoisen määritelmän epästandardien reaalilukujen avulla sekä todistamme ääriarvolauseen.

Oletamme, että lukija tuntee ensimmäisen kertaluvun logiikan perusteet siinä laajuudessa kuin esimerkiksi [Sal92] ne esittelee. Erityisesti aakkoston, totuuden, teorian ja mallin käsitteet ovat keskeisiä. Yleisen kompaktisuuslauseen kuitenkin esittelemme, vaikkakin ilman todistusta, sillä se on keskeisessä osassa epästandardien reaalilukujen olemassaolon todistamisessa. Sallimme aakkostoissamme mielivaltaisen monen paikan relaatio- ja funktiosymbolit sekä käytämme ekvivalenssisymbolia. Erityisesti tulee myös huomata, että hyväksymme aakkostot, joissa on ylinumeroituva määrä symboleita.

1 Reaalilukujen epästandardimalli

Tässä luvussa muodostamme epästandardien reaalilukujen kunnan ensimmäisen kertaluvun logiikan avulla. Samalla saamme myös tärkeitä perustuloksia kyseisen struktuurin ominaisuuksista. Erityisen tärkeä on ns. siirtoperiaate, joka kertoo, kuinka ominaisuudet siirtyvät tavallisilta reaaliluvuilta epästandardeille sekä päinvastoin.

1.1 Kompaktisuuslause

Osoittaaksemme halutunlaisen struktuurin olemassaolon, tarvitsemme ensimmäisen kertaluvun logiikan kompaktisuuslausetta. Esitämme sen tässä ilman todistusta, sillä kyseinen todistus on huomattavan työkäs eikä sen yksityiskohtiin perehtyminen olisi tämän tutkielman tavoitteiden mukaista.

Lause 1.1.1 (Yleinen kompaktisuuslause) *[Ebb94, s. 89, lause 2.1 (b)] Olkoon L aakkosto ja T L-teoria. Jos T:n jokaisella äärellisellä osajoukolla on malli, niin T:llä on malli.*

Todistusta varten katso esimerkiksi [Ebb94]. Kompaktisuuslauseen todistukseen ylinumeroituvat aakkoston tapauksessa tarvitaan valinta-aksioomaa, joten myöhemmin saamamme olemassaolotodistus myös vaatii valinta-aksiooman.

1.2 Epästandardimallin olemassaolo

Aluksi muodostamme loogisen aakkoston, jonka puitteissa voimme puhua reaalilukujen ominaisuuksista. Määrittelemme aakkoston L seuraavasti:

1. Jokaista reaalilukujen joukon $\mathbb{R}$ alkiota c kohti aakkostoon L kuuluu vakiosymboli c.

2. Jokaista n-paikkaista relaatiota $R \subseteq \mathbb{R}^n$ kohti L:ään kuuluu n-paikkainen predikaattisymboli R kaikilla $n \geq 1$.

3. Jokaista n-paikkaista funktiota $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kohti L:ään kuuluu n-paikkainen funktiosymboli F kaikilla $n \geq 1$.

Otamme siis aakkostoon L symbolin jokaista reaalilukujen alkiota, relaatiota ja funktiota kohden. Näitä symboleita voi ajatella kyseisten matemaattisten objektien niminä kielessämme. Mikäli objektilla on jokin yleisessä käytössä oleva merkki, esimerkiksi numero 1 tai funktio sin, käytämme kyseistä merkkiä myös vastaavana kielen L symbolina. Kontekstista pitäisi olla selvää, tarkoittaako jokin merkki L:n symbolia vai kyseistä matemaattista objektia.

Voidaksemme käyttää loogista kieltämme reaaliluvuista puhumiseen, määrittelemme L-mallin $\mathcal{R}$ seuraavasti:

$$\begin{aligned}
&dom(\mathcal{R}) = \mathbb{R}\\
&c^{\mathcal{R}} = c\\
&R^{\mathcal{R}} = R\\
&F^{\mathcal{R}} = F
\end{aligned}$$

Oleellisesti siis malli $\mathcal{R}$ asettaa jokaisen symbolin tarkoittamaan sitä objektia, jonka nimeksi se alunperin valittiinkin.

Huomatus 1.2.1 *Käytämme jatkossa loogisissa kaavoissa lyhennysmerkintöinä tavallisia matemaattisia merkintöjä täsmällisten loogisten merkintöjen sijaan. Esimerkiksi siis tulemme käyttämään merkintää $x+y$ sen sijaan, että kirjoittaisimme $+(x, y)$.*

Nyt L-teoria $T = \{\phi \mid \phi \, \text{on } L\text{-lause ja} \, \mathcal{R} \models \phi\}$ kuvaa kaikki reaalilukujen ominaisuudet, jotka voidaan ilmaista ensimmäisen kertaluvun logiikassa. Kuitenkin T:llä on muitakin malleja kuin $\mathcal{R}$, kuten seuraava lause kertoo.

Lause 1.2.2 *Olkoon ϵ aakkostoon L kuulumaton merkki. Teorialla T on malli ${}^*\mathcal{R}$, jolle pätee*

$$^*\mathcal{R} \models \epsilon > 0$$

ja

$$^*\mathcal{R} \models \epsilon \cdot n < 1$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Todistus: Valitaan joukko T' seuraavasti:

$$T' = T \cup \{\epsilon > 0\} \cup \{\epsilon \cdot n < 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Selvästi T' on $L \cup \{\epsilon\}$ -teoria.

Olkoon nyt T'_0 mielivaltainen äärellinen T':n osajoukko. T'_0:n äärellisyydestä seuraa, että siinä voi olla vain äärellinen määrä muotoa $\epsilon \cdot n < 1$ olevia lauseita. Voimme siis valita sellaisen $m \in \mathbb{N}$, jolla lause $\epsilon \cdot n < 1$ ei kuulu T'_0:aan millään $n \geq m$. Nyt olkoon malli $\mathcal{M}$ kuten $\mathcal{R}$, paitsi että $\epsilon^{\mathcal{M}} = 1/m$. Selvästi nähdään, että $\mathcal{M} \models T'_0$.

Koska T':n mielivaltaisella äärellisellä osajoukolla on malli, niin kompaktisuuslauseen nojalla T':llä on malli. T':n määritelmän nojalla tämä on haluttu ${}^*\mathcal{R}$. $\square$

1.3 Epästandardien reaalilukujen joukko ${}^*\mathbb{R}$

Tarkastellemme nyt tarkemmin mallia ${}^*\mathcal{R}$. Jatkossa kutsumme joukkoa $dom({}^*\mathcal{R})$ epästandardien reaalilukujen joukoksi ja merkitsemme sitä ${}^*\mathbb{R}$. Käytämme ${}^*\mathbb{R}$:n alkiosta $c^{{}^*\mathcal{R}}$ merkintää ${}^*c$, relaatiosta $R^{n^{{}^*\mathcal{R}}}$ merkintää ${}^*R$ ja funktiosta $f^{n^{{}^*\mathcal{R}}}$ merkintää ${}^*f$.

Koska todistimme mallin ${}^*\mathcal{R}$ olemassaolon epäkonstruktiivisesti, emme pysty suoraan sanomaan siitä oikeastaan mitään. Seuraava tulos kuitenkin antaa meille työkalut sen tutkimiseen.

Korollaari 1.3.1 (Siirtoperiaate) *Kaikille L-lauseille ϕ pätee*

$$\mathcal{R} \models \phi \quad \textit{jos ja vain jos} \quad {}^*\mathcal{R} \models \phi.$$

Todistus: Seuraa välittömästi lauseesta 1.2.2. □

Siirtoperiaate siis antaa meille tietoa siitä, millainen struktuuri ${}^*\mathcal{R}$ on. Se toimii myös päinvastoin, sillä jos voimme osoittaa, että mallilla ${}^*\mathcal{R}$ on jokin L-lauseella ilmaistavissa oleva ominaisuus, siirtoperiaatteen nojalla kyseinen ominaisuus on myös $\mathcal{R}$:llä. Tämä mahdollistaa epästandardien reaalilukujen käytön tavallisten reaalilukujen tutkimisessa.

Esimerkki 1.3.2 $({}^*\mathbb{R}, {}^*+, {}^*\cdot, {}^*\leq)$ *on kommutatiivinen järjestetty kunta.*

Todistus: Olkoon $\mathcal{M}$ L-malli. Järjestetyn kunnan määritelmän ja totuusmääritelmän perusteella $(dom(\mathcal{M}), +^{\mathcal{M}}, \cdot^{\mathcal{M}}, \leq^{\mathcal{M}})$ on kommutatiivinen järjestetty kunta, nolla-alkiona $0^{\mathcal{M}}$ ja ykkösalkiona $1^{\mathcal{M}}$, täsmälleen silloin kun seuraavat lauseet ovat totta $\mathcal{M}$:ssä:

$$\forall a \forall b \forall c \; a + (b + c) = (a+b)+c$$
$$\forall a \forall b \forall c \; a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$$
$$\forall a \forall b \; a+b = b+a$$
$$\forall a \forall b \; a\cdot b = b\cdot a$$
$$\forall a \forall b \forall c \; a\cdot(b+c) = (a\cdot b)+(a\cdot c)$$
$$\forall a \; a+0 = a$$
$$\forall a \; a\cdot 1 = a$$
$$\neg 0 = 1$$
$$\forall a \exists b \; a+b = 0$$
$$\forall a \; (\neg a = 0 \rightarrow \exists b \; a\cdot b = 1)$$
$$\forall a \forall b \forall c \; (a \leq b \rightarrow a+c \leq b+c)$$
$$\forall a \forall b \; ((0 \leq a \; \wedge 0 \leq b) \rightarrow 0 \leq a\cdot b)$$

Tämä nähdään soveltamalla totuusmääritelmää jokaiseen ylläolevista lauseista. Sivuutamme yksityiskohdat. Oleellista on huomata, kuinka reaalilukujen ominaisuuksia voidaan ilmaista ensimmäisen kertaluvun logiikan lauseilla.

Tiedämme, että $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ on kommutatiivinen järjestetty kunta, joten yllä olevat lauseet ovat totta mallissa $\mathcal{R}$:ssä. Lauseen 1.3.1 nojalla kyseiset lauseet ovat totta myös mallissa ${}^*\mathcal{R}$. Tulos seuraa välittömästi. □

Määritellään nyt kuvaus $*\colon \mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ asettamalla $*(x) = {}^*x$. Tämä siis tarkoittaa, että funktio $*$ kuvaa alkion $x^{\mathcal{R}}$ alkiolle $x^{{}^*\mathcal{R}}$, kun x on aakkoston L vakiosymboli. Koska kieli L määriteltiin siten, että siinä on täsmälleen yksi vakiosymboli jokaista $\mathbb{R}$:n alkiota kohti, on $*$ hyvinmääritelty. Tarkastelemme nyt tämän kuvauksen ominaisuuksia.

Lause 1.3.3 *$*$ on injektio.*

Todistus: Olkoon x ja y kaksi mielivaltaista eri $\mathbb{R}$:n alkiota. Nyt $\mathcal{R} \models \neg x = y$, joten myös ${}^*\mathcal{R} \models \neg x = y$. Tästä seuraa, että ${}^*x \neq {}^*y$. Toisaalta $*(x) = {}^*x$ ja $*(y) = {}^*y$, joten $*(x) \neq *(y)$. Siis $*$ on injektio. □

Teemme myös tärkeän havainnon, että epästandardien reaalilukujen joukossa on alkio $\epsilon^{{}^*\mathcal{R}}$. Se ei voi olla minkään kielen L vakiosymbolin tulkinta mallissa ${}^*\mathcal{R}$, koska jokaisella $x \in \mathbb{R}$ voidaan valita $n \in \mathbb{N}$ niin, että $\mathcal{R} \not\models x \cdot n < 1$ tai $\mathcal{R} \not\models x > 0$. Siis kuvaus $*$ ei ole surjektio eikä siten myöskään bijektio.

Lause 1.3.4

(i) *Kaikilla aakkoston L n-paikkaisilla relaatiosymboleilla R ja kaikilla $x_1, x_2, \ldots x_n \in \mathbb{R}$ pätee: $(x_1, x_2, \ldots x_n) \in R^{\mathcal{R}}$ jos ja vain jos $(*(x_1), *(x_2), \cdots *(x_n)) \in R^{{}^*\mathcal{R}}$.*

(ii) *Kaikilla aakkoston L n-paikkaisilla funktiosymboleilla F ja kaikilla $x_1, x_2, \ldots x_n \in \mathbb{R}$ pätee: $*(F^{\mathcal{R}}(x_1, x_2, \ldots x_n)) = F^{{}^*\mathcal{R}}(*(x_1), *(x_2), \cdots *(x_n))$.*

Todistus: (i): Tämä nähdään suoraviivaisella päättelyllä:

$$(x_1, x_2, \ldots x_n) \in R^{\mathcal{R}} \Leftrightarrow \mathcal{R} \models R(x_1, x_2, \ldots x_n)$$
$$\Leftrightarrow {}^*\mathcal{R} \models R(x_1, x_2, \ldots x_n) \Leftrightarrow ({}^*x_1, {}^*x_2, \ldots {}^*x_n) \in R^{{}^*\mathcal{R}}.$$

Ensimmäisessä ja viimeisessä päättelyssä käytämme totuusmääritelmää, keskimmäisessä siirtoperiaatetta. Kun vielä muistamme, että $*(x) = {}^*x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, saamme väitteen.

(ii): Merkitään $F^{\mathcal{R}}(x_1, x_2, \ldots x_n) = c$. Nyt lause $F(x_1, x_2, \ldots x_n) = c$ on tosi mallissa $\mathcal{R}$, joten se on myös tosi mallissa ${}^*\mathcal{R}$. Siis

$$F^{{}^*\mathcal{R}}(*(x_1), *(x_2), \cdots *(x_n)) = F^{{}^*\mathcal{R}}({}^*x_1, {}^*x_2, \ldots {}^*x_n) = {}^*c.$$

Toisaalta $*(F^{\mathcal{R}}(x_1, x_2, \ldots x_n)) = *(c) = {}^*c$. □

Kuvaus $*$ siis antaa meille tavan upottaa joukon $\mathbb{R}$ joukkoon ${}^*\mathbb{R}$. Lauseiden 1.3.3 ja 1.3.4 nojalla joukko $*(\mathbb{R})$ on täsmälleen samallainen struktuuri kuin $\mathbb{R}$. Tämän havainnon nojalla samaistamme jatkossa kyseiset joukot, joilloin voimme pitää ${}^*\mathbb{R}$:ä kunnan $\mathbb{R}$ laajennoksena. Erityisesti siis $\mathbb{R} \subset {}^*\mathbb{R}$. Voimme näin myös samaistaa alkiot $c \in \mathbb{R}$ ja ${}^*c \in {}^*\mathbb{R}$.

2 Infinitesimaali ja ääretön

Muodostimme edellä epästandardien reaalilukujen kunnan ${}^*\mathbb{R}$. Keskitymme nyt tutkimaan sen ominaisuuksia. Käytännöllisyyden vuoksi tulemme jatkossa käyttämään epästandardien reaalilukujen relaatioista ja funktioista samoja merkintöjä kuin reaalilukujen vastaavista, paitsi jos tämä voisi aiheuttaa sekaannuksia kyseisessä yhteydessä.

2.1 Määritelmiä

Huomasimme aikaisemmin, että alkio $\epsilon^{{}^*\mathcal{R}} \in {}^*\mathbb{R}$ ei kuulu reaalilukuihin. Tämän havainnon pohjalta teemme seuraavan määritelmän.

Määritelmä 2.1.1 *[Hur85, s. 25] Oletetaan, että $x \in {}^*\mathbb{R}$. Sanomme, että x on* standardi, *jos $x \in \mathbb{R}$. Muussa tapauksessa x on* epästandardi.

Lauseen 1.2.2 nojalla $\epsilon^{{}^*\mathcal{R}} < \frac{1}{n}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja lisäksi $\epsilon^{{}^*\mathcal{R}} > 0$. Sillä on siis samat ominaisuudet, joita varhaisessa analyysissa käytetyillä infinitesimaaleilla ajateltiin olevan. Koska ${}^*\mathbb{R}$ on järjestetty kunta, tiedämme, että alkio $1/\epsilon^{{}^*\mathcal{R}}$ on myös olemassa. Lisäksi $1/\epsilon^{{}^*\mathcal{R}} > n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Siis tietyssä mielessä voimme sanoa, että $1/\epsilon^{{}^*\mathcal{R}}$ on äärettömän suuri. Luokittelemme siis ${}^*\mathbb{R}$:n alkioita edelleen seuraavan määritelmän mukaisesti.

Määritelmä 2.1.2 *[Hur85, s. 25]*

(i) Luku $x \in {}^*\mathbb{R}$ on äärellinen, jos $|x| < n$ jollakin $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Luku $x \in {}^*\mathbb{R}$ on äärettömän pieni eli infinitesimaali, jos $|x| < 1/n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Luku $x \in {}^*\mathbb{R}$ on ääretön, jos $|x| > n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Totesimme jo edellä, että ${}^*\mathbb{R}$ todella sisältää sekä infinitesimaaleja että äärettömiä lukuja. Vastaavasti $-\epsilon^{*\mathcal{R}}$ ja $-1/\epsilon^{*\mathcal{R}}$ edustavat negatiivisia infinitesimaaleja ja äärettömiä lukuja. Lisäksi luku 0 on yllä annetun määritelmän nojalla infinitesimaali.

Esimerkki 2.1.3 *Olkoon $\varepsilon, \delta \in {}^*\mathbb{R}$ infinitesimaalisia, $x \in {}^*\mathbb{R}$ äärellinen muttei infinitesimaali, $a, b \in {}^*\mathbb{R}$ äärellisiä ja $\Omega, \Psi \in {}^*\mathbb{R}$ äärettömiä. Tällöin*

(a) $\varepsilon + \delta$ on infinitesimaali.

(b) $a\varepsilon$ on infinitesimaali.

(c) $a + b$ on äärellinen.

(d) $\frac{a}{\Omega}$ on infinitesimaali.

(e) $\Omega\Psi$ on ääretön.

(f) $x\Omega$ on ääretön.

(g) $\Omega + a$ on ääretön.

Todistus: Ensin teemme havainnon, että itseisarvon ominaisuus $|xy| = |x||y|$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$ sekä kolmioepäyhtälö ovat voimassa myös epästandardeilla reaaliluvuilla, sillä kyseiset ominaisuudet voidaan esittää seuraavilla L-lauseilla.

$$\forall x \forall y \ |xy| = |x||y|$$
$$\forall x \forall y \ |x| - |y| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$$

Siis siirtoperiaatteen nojalla nämä ominaisuudet siirtyvät ${}^*\mathbb{R}$:lle. Nyt väitteet voidaan osoittaa suoraan määritelmän 2.1.2 pohjalta.

(a) $|\varepsilon + \delta| \leq |\varepsilon| + |\delta| < 1/2n + 1/2n = 2/2n = 1/n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

(b) On olemassa sellainen $m \in \mathbb{N}$, että $|a| < m$. Nyt $|a\varepsilon| = |a||\varepsilon| < m \cdot 1/mn = 1/n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

(c) $|a + b| \leq |a| + |b| < m + n$ joillain $m, n \in \mathbb{N}$, koska a ja b ovat äärellisiä.

(d) On olemassa sellainen $m \in \mathbb{N}$, että $|a| < m$. Siis $|a/\Omega| = |a||1/\Omega| < m \cdot 1/mn = 1/n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

(e) $|\Omega\Psi| = |\Omega||\Psi| > 1 \cdot n = n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

(f) Koska x ei ole infinitesimaali, niin $|x| > 1/m$ jollain $m \in \mathbb{N}$. Siis $|x\Omega| = |x||\Omega| > 1/m \cdot mn = n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

(g) On olemassa sellainen $m \in \mathbb{N}$, että $|a| < m$. Nyt $|\Omega + a| \geq |\Omega| - |a| > n + m - m = n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Infinitesimaalin käsitteen pohjalta määrittelemme kaksi relaatiota. Näistä ensimmäinen tulee olemaan keskeinen monissa myöhemmissä tarkasteluissa.

Määritelmä 2.1.4 *[Hur85, s. 26] Oletetaan, että $x, y \in {}^*\mathbb{R}$. Sanomme, että*

(i) x ja y ovat äärettömän lähellä tai infinitesimaalisen lähellä, jos $x - y$ on äärettömän pieni. Merkitsemme tätä $x \simeq y$. Jos x ja y eivät ole äärettömän lähellä toisiaan, merkitsemme $x \not\simeq y$

(ii) x ja y ovat äärellisen lähellä, jos $x - y$ on äärellinen. Merkitsemme $x \sim y$ jos näin on ja $x \not\sim y$ muuten.

Jatkoa varten teemme vielä seuraavan havainnon näiden relaatioiden ominaisuuksista.

Lause 2.1.5 *$\simeq$ ja $\sim$ ovat ekvivalenssirelaatioita.*

Todistus: Refleksiivisyys: $|x - x| = 0$ kaikilla $x \in {}^*\mathbb{R}$ ja 0 on infinitesimaali sekä äärellinen.

Symmetrisyys: $|x - y| = |y - x|$ kaikilla $x, y \in {}^*\mathbb{R}$.

Transitiivisuus: $|x - z| = |x - y + y - z| \leq |x - y| + |y - z|$ kaikilla $x, y, z \in {}^*\mathbb{R}$. Jos $x \simeq y$ ja $y \simeq z$, niin $|x - y|$ ja $|y - z|$ ovat infinitesimaaleja, joilloin myös $|x - y| + |y - z|$ on infinitesimaali esimerkin 2.1.3 (a) nojalla. Vastaavasti esimerkin 2.1.3 (c) nojalla $|x - y| + |y - z|$ on äärellinen, jos $x \sim y$ ja $y \sim z$.□

2.2 Standardiosa

Tarkastelemme vielä yhtä epästandardien reaalilukujen ominaisuutta.

Lause 2.2.1 *[Hur85, s. 26] Olkoon $p \in {}^*\mathbb{R}$ äärellinen. Tällöin on olemassa täsmälleen yksi $r \in \mathbb{R}$, jolle $p \simeq r$.*

Todistus: Olkoon A kaikkien niiden reaalilukujen joukko, jotka vähintään yhtä suuria kuin p, eli $A = \{x \in \mathbb{R} \mid p \leq x\}$. Olkoon B puolestaan p:tä pienempien reaalilukujen joukko eli $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < p\}$. Koska p on äärellinen, on olemassa standardi luku s jolla $-s < p < s$. Koska $-s$ nyt kuuluu B:hen, B on epätyhjä, ja lisäksi s on B:n yläraja. Siis B on epätyhjä ja ylhäältä rajoitettu, joten $\sup(B) \in \mathbb{R}$ on olemassa.

Merkitään $\sup(B) = r$. Olkoon lisäksi $\varepsilon > 0$ standardi ja mielivaltainen. Nyt supremumin ominaisuuksien nojalla $(r - \varepsilon) \in B$. Samoin $(r + \varepsilon) \notin B$, joten $(r+\varepsilon) \in A$. Tästä seuraa, että $r - \varepsilon < p \leq r + \varepsilon$ eli $|r - p| \leq \varepsilon$. Koska ε valittiin mielivaltaiseksi, tämä itseasiassa pätee kaikilla standardeilla $\varepsilon > 0$. Siis $r \simeq p$.

Osoitetaan vielä, että r on yksikäsitteinen. Oletetaan, että $r' \in \mathbb{R}$ ja $r' \simeq p$. Tällöin $|r - r'| = |r - p + p - r'| \leq |r - p| + |p - r'| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ kaikilla $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Koska myös r ja r' ovat standardeja, myös $|r - r'|$ on standardi, joten $r = r'$. $\square$

Lause 2.2.1 siis sanoo, että jokainen äärellinen epästandardi reaaliluku on jonkin standardin luvun välittömässä läheisyydessä. Tähän liittyen annamme seuraavan määritelmän.

Määritelmä 2.2.2 *Olkoon $p \in {}^*\mathbb{R}$ äärellinen. Kutsumme yksikäsitteistä standardia lukua r, jolla $p \simeq r$, p:n* standardiosaksi *ja merkitsemme sitä* $\mathrm{st}(p)$. *Näin määriteltyä funktiota* $\mathrm{st}\colon \{x \in {}^*\mathbb{R} \mid x \text{ äärellinen}\} \to \mathbb{R}$ *kutsumme* standardiosakuvaukseksi.

3 Epästandardi analyysi

Olemme nyt tutustuneet epästandardien reaalilukujen teorian perusominaisuuksiin. Sovellamme tässä luvussa sitä perusanalyysiin. Analyyttisten kysymysten tutkimusta epästandardien reaalilukujen avulla kutsutaan epästandardiksi analyysiksi.

Haluamme jatkossa käsitellä funktioita, joiden määrittelyjoukko ei ole koko $\mathbb{R}$. Aakkoston L funktiosymbolit kuitenkin kuvaavat vain funktioita $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joten niiden avulla emme voi puhua näistä funktioista loogisissa lauseissa. Kuitenkin funktiot ovat myös relaatioita, joten jokaista funktiota $F\colon A \to \mathbb{R}$, missä $A \subset \mathbb{R}$, kohti on aakkostossa L relaatiosymboli F, jonka tulkinta on funktio F. Täten loogisissa lauseissa esiintyvät merkkijonot $F(x) = y$ tulee tulkita vaihtoehtoisena kirjoitustapa merkkijonolle $F(x, y)$, jos reaalifunktion F lähtöjoukko on jokin muu kuin koko $\mathbb{R}$. Vastaavasti monimutkaisemmatkin tällaisia funktioita koskevat väitteet tulee käsittää sopivina relaatioina.

3.1 Raja-arvo

Raja-arvo on yksi analyysin peruskäsitteistä. Epästandardit reaaliluvut mahdollistavat käytännöllisen vaihtoehtoisen määritelmän reaalifunktioiden raja-arvolle, kuten seuraava lause kertoo.

Lause 3.1.1 *[Hur85, s. 45, lause 10.1 (a)] Olkoon $f\colon A \to \mathbb{R}$, missä $A \subset \mathbb{R}$. Tällöin* $\lim_{x\to a} f(x) = K$, *jos ja vain jos* ${}^*f(x) \simeq K$ *kaikilla* $x \in {}^*A$, *joilla* $x \simeq a$ *ja* $x \neq a$.

Todistus: "$\Rightarrow$": Oletetaan, että $\lim_{x\to a} f(x) = K$. Olkoon $x \in {}^*A$ mielivaltainen luku, jolla $x \simeq a$ ja $x \neq a$. Nyt riittää osoittaa, että $|{}^*f(x) - K|$ on infinitesimaali eli $|{}^*f(x) - K| < \varepsilon$ kaikilla positiivisilla $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen positiivinen reaaliluku. Raja-arvon määritelmän nojalla on olemassa sellainen reaaliluku $\delta > 0$, että kun $0 < |y - a| < \delta$, niin $|f(y) - K| < \varepsilon$ kaikilla $y \in A$. Siis L-lause

$$\forall x\ ((x \in A \wedge 0 < |x - a| < \delta) \to |f(x) - K)| < \varepsilon)$$

on totta mallissa $\mathcal{R}$, joten se on myös totta mallissa ${}^*\mathcal{R}$ siirtoperiaatteen nojalla. Näinollen myös kaikilla $y \in {}^*A$ pätee $|f(y) - K| < \varepsilon$, jos $0 < |y - a| < \delta$. Koska $|x - a|$ on infinitesimaali ja $x \neq a$, ehto $0 < |x - a| < \delta$ on voimassa, joten $|f(y) - K| < \varepsilon$. Koska ε valittiin mielivaltaisesti, $|f(y) - K| < \varepsilon$ kaikilla standardeilla $\varepsilon > 0$ eli ${}^*f(x) \simeq K$.

"$\Leftarrow$": Oletetaan nyt, että kaikilla $x \in {}^*A$ pätee ${}^*f(x) \simeq K$, kun $x \simeq a$. Tehdään vastaoletus, että $\lim_{x\to a} f(x)$ ei ole K. Tällöin voidaan valita sellainen reaaliluku $\varepsilon > 0$, että kaikilla $\delta > 0$ on olemassa $x \in A$, jolla $0 < |x - a| < \delta$ ja $|f(x) - K| \geq \varepsilon$. Nyt L-lause

$$\forall \delta\ (\delta > 0 \to \exists x\ (x \in A \wedge 0 < |x - a| < \delta \wedge |f(x) - K| \geq \varepsilon))$$

on totta mallissa $\mathcal{R}$, joten se on myös totta mallissa ${}^*\mathcal{R}$. Olkoon nyt $\delta \in {}^*\mathbb{R}$ positiivinen ja äärettömän pieni. Tällöin aikaisemman päättelyn nojalla on olemasssa sellainen $x \in {}^*A$, että $0 < |x - a| < \delta$ ja $|{}^*f(x) - K| \geq \varepsilon$. Siis $x \simeq a$ mutta ${}^*f(x) \not\simeq K$. Tämä on ristiriidassa oletuksen kanssa, joten väite pätee. $\square$

Myös yleistetty raja-arvon käsite, mukaanlukien raja-arvot äärettömässä ja äärettömät raja-arvo, voidaan määritellä samaan tapaan epästandardien reaalilukujen avulla. Tyydymme kuitenkin tämän tutkielman puitteissa vain perustapaukseen.

Koska muutkin analyyttiset käsitteet, kuten jatkuvuus ja derivaatta, perustuvat raja-arvon käsitteeseen, voidaan niitäkin tutkia lauseen 3.1.1 avulla.

Esimerkki 3.1.2 *Olkoon* $f(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *määritelty kaavalla* $f(x) = x^2$.

(a) *Laske* $\lim_{x\to 2} f(x)$.

(b) *Osoita, että* f *on jatkuva koko reaalilukujen joukossa.*

(c) *Laske* $f'(x)$.

(a) Huomataan ensin, että $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 0} f(2+x)$. Oletetaan nyt, että $x \simeq 0$ ja $x \neq 0$. Nyt $f(2+x) = (2+x)^2 = 4 + 2x + x^2 \simeq 4$. Siis $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$.

(b) Olkoon $a \in \mathbb{R}$ mielivaltainen sekä $x \simeq 0$ ja $x \neq 0$. Tällöin $f(a+x) = (a+x)^2 = a^2 + xa + x^2 \simeq a^2 = f(a)$. Tästä voidaan päätellä samoin kuin kohdassa (a), että $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, eli f on jatkuva.

(c). Olkoon $x \in \mathbb{R}$ mielivaltainen sekä $h \simeq 0$ ja $h \neq 0$. Tällöin

$$\begin{aligned} &\frac{f(x) - f(x-h)}{h} = \frac{x^2 - (x-h)^2}{h} = \frac{x^2 - x^2 + 2xh - h^2}{h} \\ =&\frac{2xh - h^2}{h} = 2x - h \simeq 2x. \end{aligned}$$

Siis $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x)-f(x-h)}{h} = 2x$.

3.2 Ääriarvolause

Lopuksi vielä havainnollistamme, kuinka epästandardia analyysia voidaan käyttää reaalilukujen tutkimiseen. Todistamme yhden analyysin perustuloksista, ääriarvolauseen. Tätä varten tarvitsemme kuitenkin ensin aputuloksia.

Lemma 3.2.1 *Jokaisella positiivisella* $x \in {}^*\mathbb{R}$ *on olemassa sellainen* $n \in {}^*\mathbb{N}$, *että* $x \leq n < x + 1$.

Todistus: Tiedämme, että jokaisella $x \in \mathbb{R}$ on olemassa sellainen $n \in \mathbb{N}$, että $x \leq n < x + 1$. Siis L-lause

$$\forall x \exists y \ (y \in \mathbb{N} \wedge x \leq y < x + 1)$$

on totta mallissa $\mathcal{R}$, joten se on totta myös mallissa ${}^*\mathcal{R}$. Tämä antaa halutun tuloksen. □

Lemma 3.2.2 ${}^*\mathbb{N}$ *sisältää äärettömiä lukuja.*

Todistus: Olkoon $x \in {}^*\mathbb{R}$ positiivinen ja ääretön. Lemman 3.2.1 nojalla on olemassa $n \in {}^*\mathbb{N}$, joka on vähintään yhtä suuri kuin x. Siis $|n| = n \geq x > m$ kaikilla $m \in \mathbb{N}$, eli n on ääretön. □

Lause 3.2.3 (Ääriarvolause) *Olkoon* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *jatkuva koko välillä* $[a,b]$*. Tällöin on olemassa* $c \in [a,b]$ *niin että* $f(c) \geq f(d)$ *kaikilla* $d \in [a,b]$*.*

Todistus: Olkoon $n \in \mathbb{N}$ mielivaltainen. Muodostetaan pisteet $x_{n,k}$ niin että $x_{n,k} = a + k(b-a)/n$ kaikilla $0 \leq k \leq n, k \in \mathbb{N}$. Nyt joukko $\{f(x_{n,k}) \mid 0 \leq k \leq n\}$ on äärellinen, joten siinä on suurin alkio. L-lause

$$\forall x\ (x \in \mathbb{N} \to \exists y \forall z\ (y \in \mathbb{N} \wedge y \leq x \wedge ((z \in \mathbb{N} \wedge z \leq x) \to f(x_{x,z}) \leq f(x_{x,y}))))$$

siirtää tämän ominaisuuden epästandardeille reaaliluvuille.

Olkoon nyt $n \in {}^*\mathbb{N}$ ääretön. Tällöin on edellisen päättelyn nojalla olemassa sellainen $p \in {}^*\mathbb{N}$, että $p \leq n$ ja kaikilla $k \in {}^*\mathbb{N}$, joilla $k \leq n$ pätee $f(x_{n,k}) \leq f(x_{n,p})$. Valitaan nyt $c = \mathrm{st}(x_{n,p})$. Osoitamme, että tämä c täyttää lauseessa halutun ehdon.

Olkoon nyt $d \in [a,b]$ standardi ja olkoon $m \in {}^*\mathbb{N}$ pienin luonnollinen luku, joka on suurempi tai yhtäsuuri kuin $n(d-a)/(b-a)$. Tällöin $m = n(d-a)/(b-a) + s$, missä $0 \leq s < 1$. Nyt

$$\begin{aligned} x_{n,m} = a + \frac{m}{n}(b-a) = a + \left(\frac{n(d-a)}{b-a} + s\right)\frac{b-a}{n} \\ =& a + \frac{n(d-a)}{b-a} \cdot \frac{b-a}{n} + s\frac{b-a}{n} \simeq a + \frac{n(d-a)}{b-a} \cdot \frac{b-a}{n} \\ =& a + d - a = d. \end{aligned}$$

Eli $d \simeq x_{n,m}$ jollain $m \in {}^*\mathbb{N}$. Funktion f jatkuvuuden ja lauseen 3.1.1 nojalla $f(d) \simeq f(x_{n,m})$ ja vastaavasti $f(c) \simeq f(x_{n,p})$. Siis $f(d) \simeq f(x_{n,m}) \leq f(x_{n,p}) \simeq f(c)$. Tällöin joko $f(d) \simeq f(c)$ tai $f(d) < f(c)$. Jos $f(d) \simeq f(c)$, niin $f(d) = f(c)$, sillä sekä c että d ovat standardeja. Muulloin taas $f(d) < f(c)$. Koska d oli mielivaltainen, $f(d) \leq f(c)$ kaikilla $d \in [a,b]$ $\square$

Viitteet

[Sal92] Salminen, H. ja Väänänen, J.: Johdatus logiikkaan. - Helsinki, Gaudeamus, 1992

[Ebb94] Ebbinghaus, H.-D., Flum, J. ja Thomas, W.: Mathematical Logic - Springer-Verlag New York, Inc 1994

[Hur85] Hurd, A. E. ja Loeb, P. A.: Introduction to nonstandard real analysis. - Academic Press, Inc., 1985